

第3章

费马原理及其应用

随着科学的进一步发展,我们所追求的是比知道公式更多的东西。首先先观察,接着测量一些数据,然后总结所有数据的关系而得到定律。但是,科学真正的辉煌在于可以找到一种思想方法,运用这样的思想方法,从而使得定律清晰易懂。使得有关光的行为的定律成为明显事实的第一个思想方法是由费马于 1650 年发现的,它称为最小时间原理或费马原理。

——理查德·费曼,《费曼物理学讲义》,第一卷

重要的里程碑

公元前 140 年	希腊物理学家托勒密对光线在空气中不同的入射角,测量出其在水中的折射角,并制作出一个数值表格。
1621 年	虽然上述数值表格是在公元前 140 年建立的,直到 1621 年,荷兰数学家维勒布罗德·斯涅耳才发现了现今称为斯涅耳定律的折射定律。
1637 年	笛卡儿推导了斯涅耳定律,在推导中他假设光为粒子模型。
1657 年	费马阐述了“最小时间原理”,用其推导了斯涅耳定律,并证明了如果第二媒质的光速小一些,则光线将朝法线方向弯曲,这与笛卡儿的“粒子理论”相反。

3.1 引言

在几何光学领域研究光的传播需要用到光线的概念。为了理解什么是光线,考虑一个圆形光阑放在点光源 P 之前,如图 3.1 所示。当光阑的直径相当大(约 1cm)时,则在屏幕 SS' 上,可以看到界限分明的圆形光斑。开始减小光阑的尺寸,刚开始的时候,光斑尺寸也随之减小。但是当光阑尺寸变得非常小($\leq 0.1\text{mm}$)时,屏幕 SS' 上的图样不再是界限分明的。这种现象被称作衍射现象,它是光波长(用 λ 表示)为有限值的直接结果。在第 18 章和第 20 章中将更详细地讨论衍射现象,并证明衍射效应将随着波长的减小而减小。实际上,当在 $\lambda \rightarrow 0$ 的极限情况下,衍射现象将消失,这时,即使光阑的尺寸极其的小,也可以在屏幕 SS' 上得到界限分明的影子。因此,当波长取极限为零的情况下,可以获得无限细的一束光,叫做光线。这样,光线定义为在波长趋于零的极限下能量的传播路径。由于光波长具有 10^{-5}cm 的数量级,这与像透镜、反射镜等通常光学仪器的尺寸比起来非常小,从而在许多应用中可以忽略波长的有限大小。在这种近似下(即忽略波长有限大小)的光学领域,被

称为几何光学。

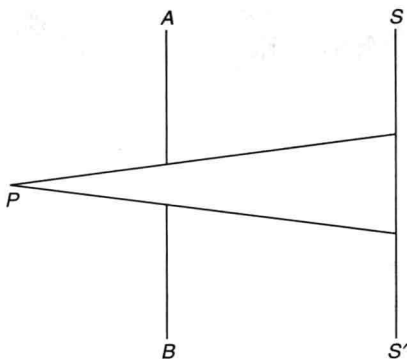


图 3.1 一个点光源发出的光经过一个圆孔,如果圆孔直径相比波长足够大,则光投射到屏幕 SS' 上形成界限分明的圆形光斑。

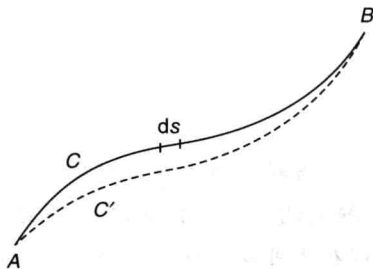


图 3.2 假如路径 ACB 代表真实路径,则经历路径 ACB 所需时间相比于相邻的路径 $AC'B$ 来说取极值。

几何光学领域的问题可以用决定光线路径的费马原理进行研究。根据费马原理,光线对应于这样的路径,它比起相邻路径的传播时间取极值,这里极值的含义是或者取最小值、或者取最大值、或者取平稳值^①。令 $n(x, y, z)$ 表示与位置相关的折射率,则

$$\frac{ds}{c/n} = \frac{nds}{c}$$

这表示了光在折射率为 n 的媒质中,经历几何路径 ds 所需要的时间。式中 c 表示自由空间中的光速。如果用 τ 表示光线沿曲线 C 经历路径 AB 所需的总时间(见图 3.2),则

$$\tau = \frac{1}{c} \sum_i n_i ds_i = \frac{1}{c} \int_{A \rightarrow B} n ds \quad (3.1)$$

式中 ds_i 代表第 i 个小弧长, n_i 是这一段小弧长处对应的折射率,积分号下的符号 $A \xrightarrow{C} B$ 代表沿着曲线 C 从点 A 积到点 B 。令 τ' 表示沿着相邻的路径 $AC'B$ (如图 3.2 所示中的虚线),假如路径 ACB 代表实际的光线路径,则 τ 与它旁边相邻的所有 $AC'B$ 路径所用时间 τ' 相比, τ 或者小于 τ' 、 τ 或者大于 τ' 、 τ 或者等于 τ' 。根据费马原理,在连接两点的许多路径中,光线将沿着所需时间取极值的那条路径通过。既然 c 是个常数,换一种说法定义光线,令

$$\int_{A \xrightarrow{C} B} n ds \quad (3.2)$$

取极值^②。上面的积分代表沿着 C 从点 A 到点 B 的光程。即光线沿着这样的路径,该路径满足

$$\delta \int_{A \xrightarrow{C} B} n ds = 0 \quad (3.3)$$

式(3.3)左边表示由于光线路径无限小的变分引起的积分变化。在这里提一下费马原理的

① 整个经典光学(包括几何光学和物理光学)都能由麦克斯韦方程组来解释,费马原理也可以由麦克斯韦方程组推导出来(见文献[1,2])。

② 关于极值原理的一个非常好的讨论见文献[3]中的第26章。

最初表述:

两点之间一束光的真实光线是取所需时间最小的路径。

上述的表述是不完全的,而且稍有漏洞。正确的表述形式为:

两点之间的真实光线是所走光程相对于路径的变分是平稳的那一条。

这一表述与式(3.3)是一致的。在这个公式中,光线光程取极小值、极大值或者平稳值。

从上述原理可以立刻看出,在均匀媒质中(即媒质的折射率在每一点都是常数),光线将是直线,因为直线对应媒质中两点间光程取最小值。如图 3.3 所示,如果点 A 和点 B 是均匀媒质中的两个点,则光线将沿着直线 ACB 传播,因为任意相邻路径如 ADB 或 AEB 都对应于所需时间更长的路径。

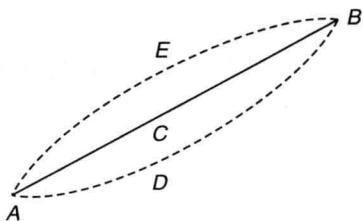


图 3.3 两点之间最短的路径是一条直线,那么,均匀媒质中的光线就是直线。所有其他相邻的路径,如 AEB 和 ADB,都要花更长的时间。

3.2 从费马原理推导反射定律和折射定律

根据费马原理,可以得到反射定律和折射定律。如图 3.4 所示,考虑一个平面反射镜 MN,为了得到反射定律,要确定从点 A(经反射镜)到点 B 的光线路径,该路径的光程应该取最小值。由于光线在均匀媒质中传播,只需考察路程取最小值。这样,需要寻找路径 APB 使得 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 为最小值。为了找到反射镜上点 P 的位置,由点 A 向反射镜引一个垂线,并令点 A' 是垂线上的一点,且 $\overline{AR} = \overline{RA'}$ 。则 $\overline{AP} = \overline{PA'}$ 和 $\overline{AQ} = \overline{A'Q}$, 这里 AQB 是与 APB 相邻的路径。很显然,为使 $\overline{A'PB}$ 为最小值,点 P 必然位于直线 A'B 上,因此,点 A, A', P 和 B 将处于同一平面内。如果在点 P 画法线 PS,则 PS 仍在此平面内。由几何关系可证明

$$\angle APS = \angle SPB$$

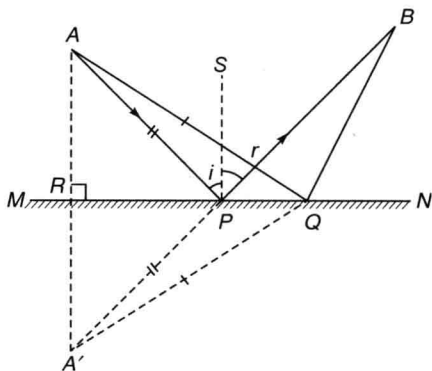


图 3.4 通过反射镜连接两点 A 和 B 的最短路径是沿着 APB 的路径,其中 P 满足以下条件: AP, PB 和反射镜面的法线 PS 在一个平面内, $\angle APS = \angle SPB$ 。直线 AB 也是一条光线。

这样,为使光程最小,入射角 $i (= \angle APS)$ 与反射角 $r (= \angle SPB)$ 必须相等,入射光线、

反射光线和镜面上入射点的法线必须位于同一平面内,以上这些表述形成了反射定律。应当指出的是,在反射镜存在的情况下,连接点 A 与点 B ,将有两条光线路径,分别为 AB 和 APB 。根据费马原理,只要光程存在一个极值,就会存在一条光线。因此两点之间可能存在不止一条光线。

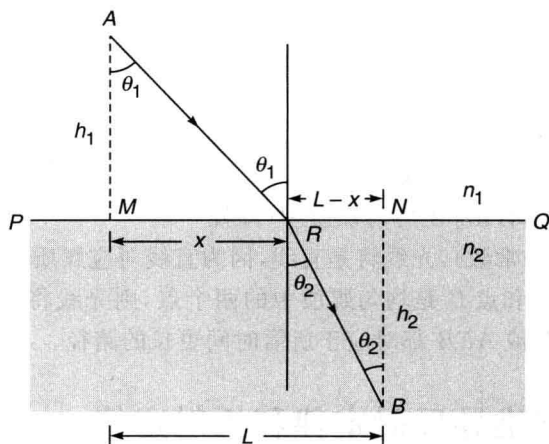


图 3.5 A 和 B 分别是折射率为 n_1 和 n_2 媒质内的两点。连接 A 和 B 的光线路径将满足 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$

为了得到折射定律,令 PQ 表示区分折射率分别为 n_1 和 n_2 的两个媒质的界面,如图 3.5 所示。令光线从点 A 出发,与界面相交于点 R ,然后沿 RB 到达点 B 。很显然,为使光程取最小值,入射光线、反射光线与界面法线必须位于同一平面内。为了确定点 R 的位置使得光程为最小,分别从点 A 和点 B 引到界面 PQ 的垂线 AM 和 BN 。令 $\overline{AM} = h_1$, $\overline{BN} = h_2$,以及 $\overline{MR} = x$,而点 A 和点 B 是固定的,则 $\overline{RN} = L - x$,这里 $\overline{MN} = L$ 是一个固定值。按照定义,从点 A 到点 B 的光程为

$$L_{\text{op}} = n_1 \overline{AR} + n_2 \overline{RB} = n_1 \sqrt{x^2 + h_1^2} + n_2 \sqrt{(L-x)^2 + h_2^2} \quad (3.4)$$

取极小值,有

$$\frac{dL_{\text{op}}}{dx} = 0$$

即

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{n_2 (L-x)}{\sqrt{(L-x)^2 + h_2^2}} = 0 \quad (3.5)$$

见图 3.5,可得

$$\sin \theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}}$$

及

$$\sin \theta_2 = \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + h_2^2}}$$

则式(3.5)可变为

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \text{ ①} \quad (3.6)$$

这正是斯涅耳折射定律。

例 3.1 考虑一组平行于光轴的光线入射到抛物面反射镜上(见图 3.6)。根据费马原理证明:所有这组光线均将通过抛物面的焦点。抛物面是由一抛物线绕它的轴旋转一周而成。这就是抛物面镜被用来聚焦远方光源的平行光线的原因(见图 3.7 和图 3.8)。

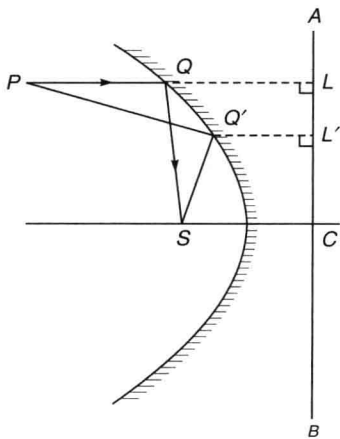


图 3.6 所有平行于抛物面反射镜光轴的光线反射后,都通过焦点(直线 ACB 是准线)。这就是天线(接收电磁波用)与太阳能接收器经常做成抛物面形状的原因。

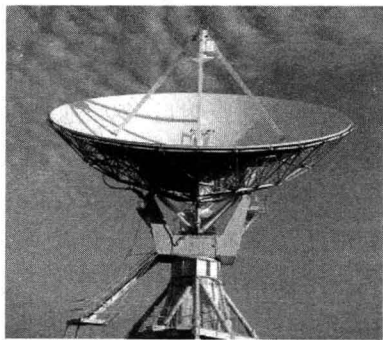


图 3.7 抛物面碟形卫星接收天线。图片由 McGraw-Hill 数字图书馆提供。彩图见文前附录图表页的图 1

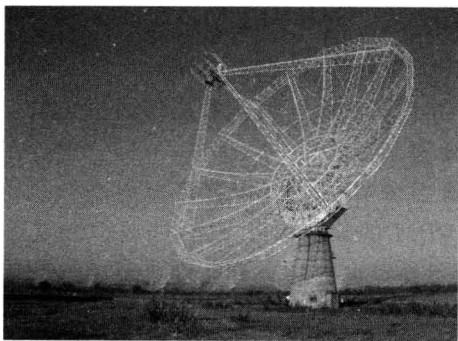


图 3.8 巨米波射电望远镜(GMRT)中自动指向的 45m 抛物面碟形天线,位于印度浦那。GMRT 具有 30 个 45m 直径的抛物面碟形天线,其中有 14 个天线组成中心阵列。图片由来自印度浦那 GMRT 的 Govind Swarup 教授提供。彩图见文前附录图表页的图 2。

解 考虑一平行于抛物面光轴的光线 PQ , 入射点在点 Q (见图 3.6)。为了找出反射线,画出抛物面上点 Q 处的法线,再画出反射线。由几何关系可以证明,反射线 QS 一定会通过焦点 S 的。然而,我们将指出这个证明过程非常麻烦。利用费马原理,可以立刻得到

① 原书为 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$

所需的结果。

为了应用费马原理,连接焦点 S 和任一点 P 之间的光线(见图 3.6)。画一条光线的路径为 $PQ'S$,根据费马原理,实际光线对应于 $\overline{PQ'} + \overline{Q'S}$ 取最小值。从点 Q' 引一垂线 $Q'L'$ 到准线 AB ,由抛物线的定义, $\overline{Q'L'} = \overline{Q'S}$,则

$$\overline{PQ'} + \overline{Q'S} = \overline{PQ'} + \overline{Q'L'}$$

令点 L 为从点 P 向 AB 所引垂线的垂足,为了使 $\overline{PQ'} + \overline{Q'L'}$ 取最小值,点 Q 应位于直线 PQL 上,所以,连接点 P 和点 S 的真实光线将是 $\overline{PQ} + \overline{QS}$,其中 PQ 平行于光轴。因此,所有平行于光轴的光线都将通过点 S ,反之,所有从点 S 发出的光线经过反射后,都将平行于光轴。

例 3.2 考虑一个椭球反射器,点 S_1 和点 S_2 是它的焦点(见图 3.9)。证明所有从焦点 S_1 发出的光线经过反射后,都将通过焦点 S_2 。

解 考虑椭圆上的任意一点 P (见图 3.9)。可知, $\overline{S_1P} + \overline{S_2P}$ 是一个常数,因此,从焦点 S_1 发出的所有光线都将通过焦点 S_2 。注意这里,有了一个光线所需时间是平稳的例子,即,对于所有的点 P ,它既不是最大值也不是最小值,而是常数值。作为一个推论,要注意以下两点。

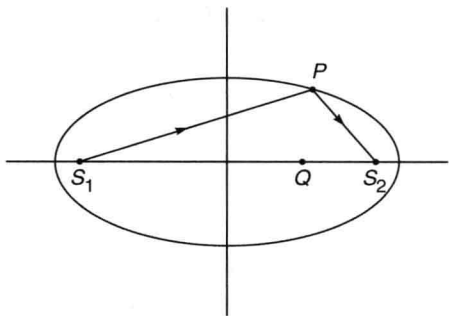


图 3.9 从椭球镜面的一个焦点发出的所有光线经镜面反射后,都将通过另一个焦点。

(1) 除了轴上的光线,不会有其他光线(不论从哪个焦点发出)通过位于轴上的任意点 Q 。

(2) 对于将椭圆绕其轴旋转而成的椭球面,上面的所有结论同样适用。

由于椭圆反射器的上述性质,它常被用于激光器系统中。例如,在红宝石激光器中(见第 26 章),激光棒与闪光灯放置在柱状椭圆反射镜的两个焦点上,这样的构造,使闪光灯发出的能量有效地传递到激光棒上。

例 3.3 考虑一球形折射分界面 SPM ,它将折射率分别为 n_1 和 n_2 的媒质分开(见图 3.10),点 C 代表球形面 SPM 的圆心。考虑两点(点 O 和点 Q),使得点 O 、 C 与 Q 在一条直线上。利用如图 3.10 所示的距离 x, y, r 和角度 θ ,计算光程 OSQ ,并根据费马原理,找出点 O 和点 Q 。最后在假定 θ 很小时,确定物点 O 的傍轴像点。

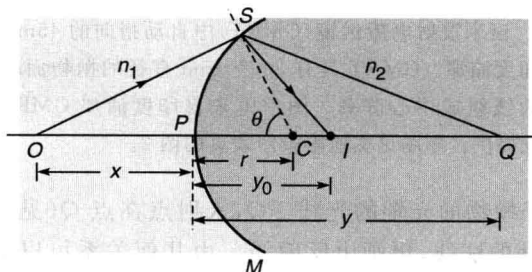


图 3.10 SPM 是分开两种折射率分别为 n_1 和 n_2 媒质的球形折射界面, C 表示球形面的圆心。

[注意: R 表示球面的曲率半径,如果曲率中心位于点 P 的右侧(或者左侧),曲率半径

取正值(或者负值)。 r 表示曲率半径的大小,如图 3.10 所示,它碰巧就是 R 。同样, x 与 y 也是距离的大小,它们的符号习惯将在本例题后面讨论。]

解 由 $\triangle SOC$,有

$$\begin{aligned}\overline{OS} &= [(x+r)^2 + r^2 - 2(x+r)r\cos\theta]^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \left[x^2 + 2rx + 2r^2 - 2(xr + r^2)\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\approx x \left(1 + \frac{rx + r^2}{x^2} \theta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx x + \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{x} \right) \theta^2\end{aligned}$$

式中已假设 θ (单位用 rad)非常小,以至于可以用下式表示

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

并代入上式做二项式展开。同理,由 $\triangle SCQ$,有

$$\overline{SQ} \approx y - \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{y} \right) \theta^2$$

则光程 OSQ 为

$$L_{\text{op}} = n_1 \overline{OS} + n_2 \overline{SQ} \approx (n_1 x + n_2 y) + \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{n_1}{x} + \frac{n_2}{y} - \frac{n_2 - n_1}{r} \right) \theta^2 \quad (3.7)$$

令光程取极值,则

$$\frac{dL_{\text{op}}}{d\theta} = 0 = r^2 \left(\frac{n_1}{x} + \frac{n_2}{y} - \frac{n_2 - n_1}{r} \right) \theta \quad (3.8)$$

这样,除非式(3.8)中圆括号内的量为零,则必须有 $\theta=0$,这意味着对应连接点 O 与点 Q 的唯一光线只能是直线 OPQ 。这个结果服从斯涅耳定律,因为 OP 是沿着球面的法线入射的,它当然不会偏离直线。

另一方面,如果 y 取某些值使得括号内的量为零,即如果 $y=y_0$,有

$$\frac{n_2}{y_0} + \frac{n_1}{x} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (3.9)$$

在此时,对于所有 θ 值, $dL_{\text{op}}/d\theta$ 都将为零。当然,已经假定 θ 非常小——也就是傍轴近似。现在,如果对应线段 $\overline{PI}=y_0$ (见图 3.10)上的点 I ,则使得所有 OSI 都是光线路径,也就是意味着所有从点 O 发出的(傍轴)光线都将通过点 I ,点 I 也就将代表傍轴像点。显然,所有像 OSI 的光线(起始于点 O 而最终通过点 I)当到达点 I 时,经历了相同的时间。

应该指出,式(3.9)是如下所示的傍轴像点公式的一个特定形式

$$\frac{n_2}{v} - \frac{n_1}{u} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (3.10)$$

式(3.10)采用传统的符号选取方法:所有在点 P 右侧测量的距离都取正号,而那些在左侧的取负号。因此,这里 $u=-x$, $v=+y$,以及 $r=+R$ 。

为确定光线路径 OPQ 是否对应于最小时间、或者最大时间、或者取常数,必须确定 $d^2 L_{\text{op}}/d\theta^2$ 的符号。

$$\frac{d^2 L_{\text{op}}}{d\theta^2} = r^2 \left(\frac{n_1}{x} + \frac{n_2}{y} - \frac{n_2 - n_1}{r} \right) = r^2 n_2 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right)$$

显然,如果 $y > y_0$ (即点 Q 位于傍轴像点 I 的右侧), $d^2 L_{\text{op}}/d\theta^2$ 是负的,光线路径 OPQ

相比于邻近路径取最大时间,反之亦然。另一方面,如果 $y=y_0$, $d^2 L_{op}/d\theta^2$ 将为零,这意味着光程极值取常数,因此,在傍轴近似下,所有从点 O 发出的光线当到达点 I 时,所需时间相等。

反过来,如果认为点 I 是点 O 的傍轴像,则

$$n_1 \overline{OP} + n_2 \overline{PI} = n_1 \overline{OS} + n_2 \overline{SI}$$

当点 Q 位于点 I 的右侧时,有

$$\begin{aligned} n_1 \overline{OP} + n_2 \overline{PQ} &= n_1 \overline{OS} + n_2 (\overline{SI} - \overline{PI} + \overline{PQ}) = n_1 \overline{OS} + n_2 (\overline{SI} + \overline{IQ}) \\ &> n_1 \overline{OS} + n_2 \overline{SQ} \end{aligned}$$

这意味着光程 OPQ 对应于一个最大值。同理,当点 Q 位于点 I 左侧时,光程 OPQ 对应于一个最小值。而当点 Q 与点 I 重合时,就具备了光程取平稳值的条件。

例 3.4 再次考察在球面处的折射,假设折射光线是从主光轴发散开来(见图 3.11)。考察傍轴光线,并令点 I (位于光轴上) 满足 $n_1 \overline{OS} - n_2 \overline{SI}$ 的值不受点 S 位置的影响,那么,对于傍轴光线,量

$$(n_1 \overline{OS} - n_2 \overline{SI}) \quad \text{与 } \theta \text{ 无关} \quad (3.11)$$

并取极值。令点 P 为第二介质中的任意点,下面希望找到连接点 O 与点 P 的光线,使得 OSP 是一条可能的光线路径,则

$$L_{op} = n_1 \overline{OS} + n_2 \overline{SP} \quad \text{取极值}$$

或

$$L_{op} = (n_1 \overline{OS} - n_2 \overline{SI}) + n_2 (\overline{IS} + \overline{SP}) \quad \text{取极值}$$

在这个公式中,同时“+”和“-”了 $n_2 \overline{SI}$ 。现在选取点 I 的位置使第一项已经取极值,则量 $\overline{SP} + \overline{SI}$ 也应该取极值,因此它应该是一条直线。所以折射光线看上去好像是从点 I 发出,从而可以说,对于一个虚像,使得

$$n_1 \overline{OS} - n_2 \overline{SI} \quad \text{取极值} \quad (3.12)$$

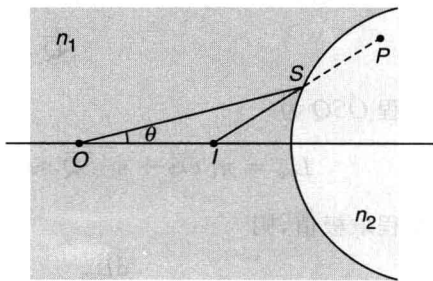


图 3.11 假设折射光从主光轴发散开。

3.3 非均匀媒质中的光线路径

在非均匀媒质中,折射率连续地变化,一般来说,其中的光线路径是弯曲的。例如,在一个大热天,接近地表的空气温度高于远离地表的空气温度。由于空气的密度随着温度的升高而减小,则从地面向上,空气的折射率将连续地增加,这会导致一种现象,即大家熟知的“海市蜃楼”。下面根据斯涅耳定律(或者费马原理)来确定光线在非均匀媒质中的路径。将问题只限制在一种特殊情况:折射率只沿着一个方向连续变化,即,假设变化方向沿着 x 轴方向。

非均匀媒质可以想象成一系列具有不同折射率的层状媒质的极限情况,如图 3.12(a) 所示。在每一个界面上,光线都满足斯涅耳定律,可得

$$n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2 = n_3 \sin \phi_3 = \dots \quad (3.13)$$

那么,称乘积

$$n(x) \cos \theta(x) = n(x) \sin \phi(x) \quad (3.14)$$

为光线路径的不变量,并将这个不变量记为 $\tilde{\beta}$ 。 $\tilde{\beta}$ 这个不变量由如下的事实确定,如果光线开始时在折射率为 n_1 的一点与 z 轴夹角为 θ_1 (相对于 z 轴),则 $\tilde{\beta}$ 的值就是 $n_1 \cos\theta_1$ 。那么,在折射率连续变化的极限情况下,如图 3.12(a)所示的那些分段直线将形成一条连续的曲线,这条曲线由下面的方程决定

$$n(x) \cos\theta(x) = n_1 \cos\theta_1 = \tilde{\beta} \quad (3.15)$$

这意味着:当折射率变化时,光线路径以保持乘积 $n(x) \cos\theta(x)$ 为常数的方式弯曲(见图 3.12(b))。式(3.15)可以用来推导光线方程(见 3.4 节)。

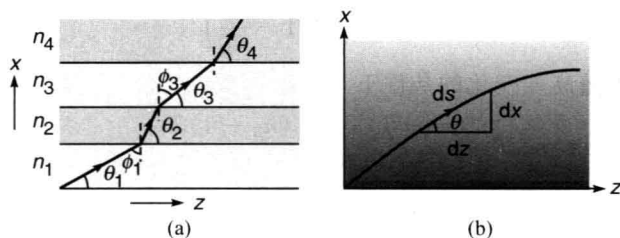


图 3.12

(a) 在层状结构中,光线会按照使乘积 $n_i \cos\theta_i$ 保持常数方式转向弯曲;

(b) 对于连续变化折射率的媒质,光线路径会按照乘积 $n(x) \cos\theta(x)$ 保持常数的方式弯曲。

3.3.1 海市蜃楼现象^①

下面定性地讨论海市蜃楼现象(也称下现蜃景现象)的形成。如前所述,在一个热天,当接近地表时,空气折射率将逐渐连续减小。实际上,折射率的变换规律可以近似地假设为以下形式

$$n(x) \approx n_0 + kx, \quad 0 < x < \text{几米} \quad (3.16)$$

式中 n_0 为 $x=0$ 处的空气折射率(即刚刚高于地面处), k 是一个常数。精确的光线路径(见例 3.8)如图 3.13 所示。

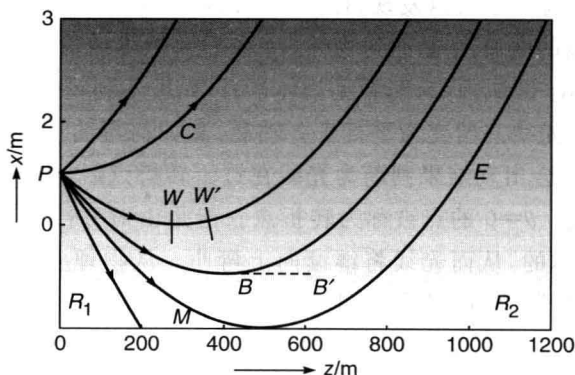


图 3.13 折射率线性变化的媒质中的光线路径(见式(3.16)),其中变化率 $k \approx 1.234 \times 10^{-5} \text{m}^{-1}$ 。物点位于 1.5m 高度处,这些光线分别对应于 $+0.2^\circ, 0^\circ, -0.2^\circ, -0.28^\circ, -0.3486^\circ$ 和 -0.5° 。不断增加的灰阶表示折射率随 x 方向增大。

^① 详见文献[4~8]。

考虑一条光线,当 $x=0$ 时处于水平位置。在进入眼睛的位置点 $E(x=x_E)$,如果点 E 的光线与水平线的夹角为 θ_E ,则有

$$\tilde{\beta} = n_0 = n_E \cos \theta_E \quad (3.17)$$

通常来讲, $\theta_E \ll 1$, 则

$$\frac{n_0}{n_E} = \cos \theta_E \approx 1 - \frac{1}{2} \theta_E^2$$

有

$$\theta_E \approx \sqrt{2 \left(1 - \frac{n_0}{n_E} \right)} \quad (3.18)$$

在空气压强近似地不随高度变化的条件下

$$(n_0 - 1)T_0 \approx (n_E - 1)T_E \quad (3.19)$$

由式(3.19),可得

$$1 - \frac{n_0 - 1}{n_E - 1} = 1 - \frac{T_E}{T_0}$$

$$\frac{n_E - n_0}{n_E} = \frac{n_E - 1}{n_E} \left(1 - \frac{T_E}{T_0} \right)$$

因此

$$\theta_E \approx \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{n_E} \right) \left(1 - \frac{T_E}{T_0} \right)} \quad (3.20)$$

在一个典型的地表温度 $T_0 \approx 323\text{K}$ ($= 50^\circ\text{C}$) 的大热天,而在地表上面 1.5m 处, $T_E \approx 303\text{K}$ ($= 30^\circ\text{C}$)。此时,当温度为 30°C 时, $n_E \approx 1.00026$, 且给定角度 $\theta_E \approx 5.67 \times 10^{-3} \text{rad} \approx 0.325^\circ$ 。如图 3.13 所示,从距地表 1.5m 处的点 P 发出的(以不同角度的)光线,每一条光线都有一个特殊的不变量 $\tilde{\beta} (= n_1 \cos \theta_1)$ 的值。如图 3.13 所示,位于物点的点 P 和观察点的点 E 都接近地表,连接点 P 和点 E 的唯一光线将沿着曲线 PME 的方向,而从点 P 水平地发出的光线指向 PC 方向。因此,在这样的条件下,位于点 E 的眼睛看到的只是物点的像,而不直接是物点本身。还可以发现,存在一个区域 R_2 ,从点 P 发出的光线无法到达此区域,因此,位于 R_2 区域的眼睛既看不到物体,也看不到物体的像,被称为阴影区。再者,还存在一个区域 R_1 ,在 R_1 区域内,只能看见物体本身,而看不到物体的虚像。

应该在此提及,当光线开始变为平行于 z 轴后,其如何弯曲不能直接由式(3.15)得到,因为在此处 $\theta=0$,可能会出现结果判断为光线在过了转折点后,将维持水平方向的错误,如图 3.13 所示中的虚线。 $\theta=0$ 的点被称为转折点。但是由对称性和光线的可逆性可得:光线相对于转折点对称的,从而光线将继续向上弯曲。从物理上看,光线弯曲可以这样理解:考虑波前的一小部分,如 W (见图 3.13),其上沿将以相对于下沿更小的速度传播,从而使波前向上倾斜(见 W'),光线也就向上弯曲了。此外,像 BB' 这样的直线路径,并不对应于光程的一个极值。

下面考虑一种情况:当 $x \rightarrow \infty$ 时,折射率逐渐趋向常数

$$n^2(x) = n_0^2 + n_2^2(1 - e^{-\alpha x}), \quad x > 0 \quad (3.21)$$

式中 n_0, n_2 和 α 是常数, x 表示距离地面的高度。当 $x=0$ 时,折射率为 n_0 ,而当对应很大的 x 值时,折射率趋向于 $(n_0^2 + n_2^2)^{1/2}$ 。通过解光线方程,可以得到如图 3.14 和图 3.15 所示的

准确的光线路径。其中各常数参量的取值为

$$n_0 = 1.000233, \quad n_2 = 0.45836, \quad \alpha = 2.303\text{m}^{-1} \quad (3.22)$$

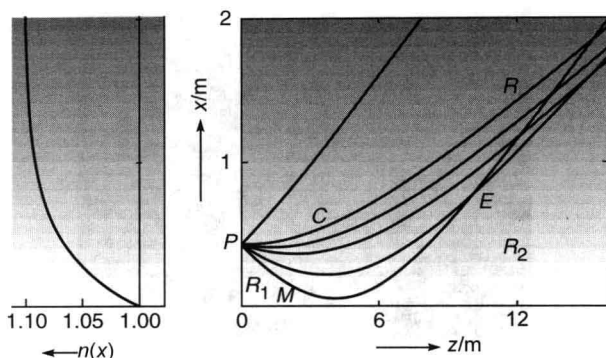


图 3.14 式(3.21)和式(3.22)描述的媒质中的光线路径。物点位于 $1/\alpha (\approx 0.43\text{m})$ 高度处。这些弯曲的光线分别对应 θ_1 (初始发射角) $= +\pi/10, 0, -\pi/60, -\pi/30, -\pi/15$ 和 $-\pi/10$ 。渐变的灰色表示折射率沿 x 方向增大。

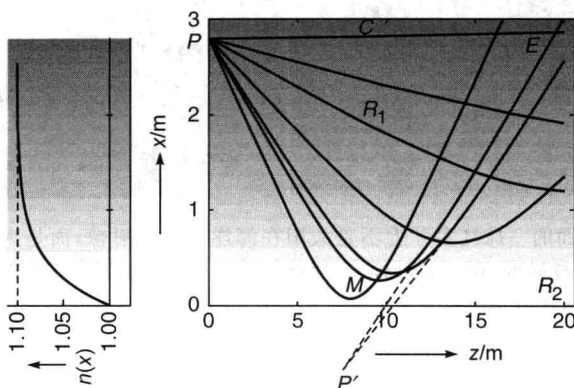


图 3.15 式(3.21)和式(3.22)描述的媒质中的光线路径。物点位于 2.8m 高度处。这些弯曲的光线分别对应 θ_1 (初始发射角) $= 0, -\pi/60, -\pi/30, -\pi/16, -\pi/11, -\pi/10$ 和 $-\pi/8$ 。渐变的灰色表示折射率沿 x 方向增大。

虽然上述方程参量的取值使得得到的折射率变化并不符合实际情况,但是它可以定量地理解渐变折射率媒质中的光线路径的形成。图 3.14 和图 3.15 所示分别为从距离地面 0.43m 与 2.8m 的物点发出的光线簇的路径。如图 3.14 所示,点 P 的折射率等于 $1.06455 (=n_1)$,且由点 P 发出的各条光线对应的不同的角度为 θ_1 , θ_1 是在点 P 处的光线与 z 轴形成的角度。从图 3.14 可以得出,当物点 P 与观察点 E 都接近地面时,连接点 P 与点 E 的光线路径只能是曲线 PME ,且从点 P 水平方向发出的光线将向上弯曲传输,如图 3.14 中的曲线 PC 。因此,在这样的条件下,位于点 E 的眼睛将看到海市蜃楼的幻像,而不是直线地看到位于点 P 处的像。然而,当点 P 与点 E 高于地面很多时(见图 3.15),眼睛可以看到几乎直线地来源于点 P 的像(源于沿曲线 PCE 的光线),而且还可以看到表面上似乎从点 P' 发出的光线。很容易看到不同的光线并未显示出从同一点发出,因此可以看到的反射像(即海市蜃楼幻像)有相当大的变形。另外还存在一个阴影区 R_2 , (从点 P 发出的)光线无法到达

这里,因此, R_2 区域内的眼睛既看不到物,也看不到它的像。现实世界中的幻像(海市蜃楼)的照片,如图 3.16 和图 3.17 所示。



图 3.16 在热天的一条公路上可以看到的典型的海市蜃楼(也叫下现蜃景)现象。图片引自 <http://fizyka.phys.poznan.pl/~pieranks/Physics%20Around%20Us/Air%20mirror.jpg>。彩图见文前附录图表页的图 3。

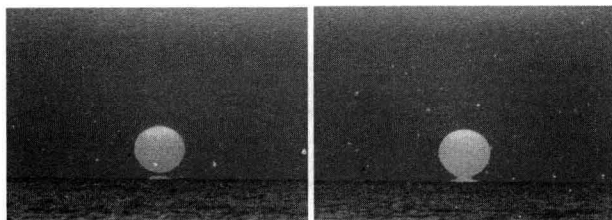


图 3.17 太阳下面的一抹红实际上不是太阳在海洋中的反射像,而是太阳下边缘形成海市蜃楼(也称下现蜃景)的(反转的)像。几秒钟后(注意太阳左边鸟的运动),反转的海市蜃楼像与正立的太阳像融合为一体。照片由美国海军实验室的 George Kaplan 拍摄,引自美国海军实验室网站。参阅 http://mintaka.sdsu.edu/GF/explan/simulations/infmir/Kaplan_photo.html。彩图见文前附录图表页的图 4。

例 3.5 以如图 3.14 所示的物点为例,计算由点 P 发出光线,在 $x=0.2\text{m}$ 处变为水平方向的光线的发射角。

在 $x=0.2\text{m}$ 处, $n(x)=1.03827$

因此,假如 θ_1 代表点 P 发出的光线与 z 轴形成的夹角(见图 3.14),则有

$$n_1 \cos \theta_1 = 1.03827 \times \cos 0$$

得

$$\theta_1 \approx 13^\circ$$

进一步,当 $x=0.2\text{m}$ 时,光线变为水平,可得到不变量的值

$$\tilde{\beta} \approx 1.03827$$

例 3.6 如图 3.15 所示,物点在 $x=2.8\text{m}$ 处,对应 $n(x) \approx 1.1$ 。对于发射角 $\theta_1 = -\pi/8$ 的光线来说

$$\tilde{\beta} = 1.1 \cos \theta_1 = 1.01627$$

这样,当光线在 $x=x_2$ 变成水平时,有

$$n(x_2) = \tilde{\beta} = 1.01627$$

则

$$x_2 = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[1 - \frac{n^2(x_2) - n_0^2}{n_2^2} \right] \approx 0.073 \text{ m}$$

3.3.2 上现蜃景现象

以上讨论的海市蜃楼(也称下现蜃景)现象的形成是源于在热地表面上的空气折射率渐增的原因。而另一方面,在冰冷的海水上方,接近水表面的空气比上面的空气更冷,从而存在一个相反的温度梯度。则在这样的情况下,其合理的折射率变化可以写为

$$n^2(x) = n_0^2 + n_2^2 e^{-\alpha x} \quad (3.23)$$

式(3.23)描述的媒质中的光线路径将在习题 3.13 中讨论。假设 n_0, n_2 和 α 取自式(3.22)。对于在高度为 0.5m 处的像点 P ,各光线路径如图 3.18 所示。假如眼睛位于点 E ,接收到的光线看上去发自点 P' 。这种物体看上去在实际位置上方的现象,称作上现蜃景现象。通常站在冰冷的海面上的观光游船会看到这种现象(见图 3.19 和图 3.20)。再者,既然没有其他光线可以从点 P 发出到达点 E (注原书为点 A),那么人们不可能直接看到物体。

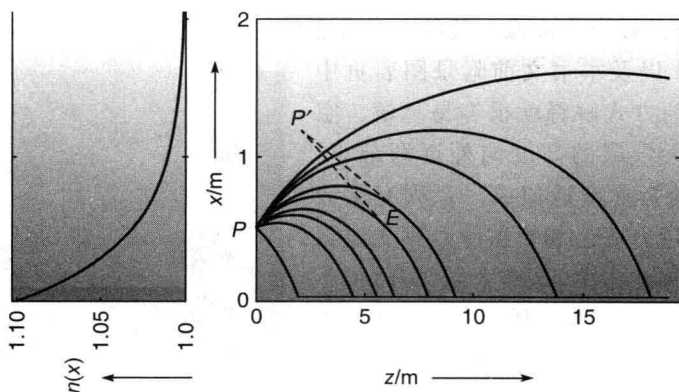


图 3.18 由位于 0.5m 高度物点发出的各光线路径,折射率分布满足式(3.23), n_0, n_2 和 α 由式(3.22)给出。

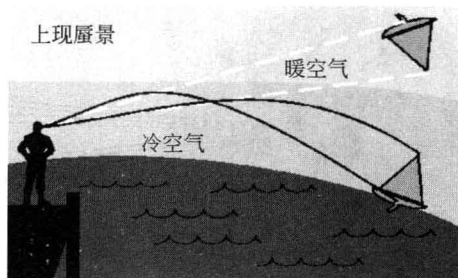


图 3.19 上现蜃景发生在与下现蜃景大气条件相反的情况下。正如所看到的,表面处的空气必须比表面上方的空气冷,这种条件在雪表面、冰表面和冷水表面是常见的。当冷空气位于暖空气下方时,光线向着表面弯曲,这样就给我们的眼睛开了个玩笑,让物体看上去在它实际位置的上方。图片引自 <http://www.islandnet.com/~see/weather/elements/mirage.htm>。彩图见文前附录图表页的图 5。

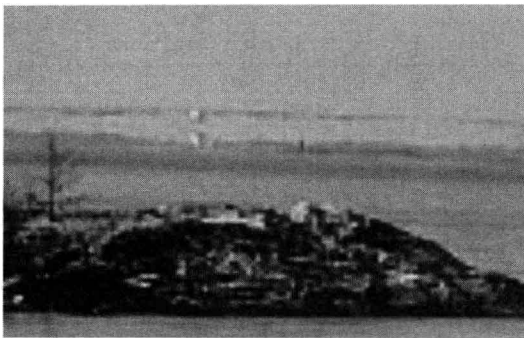


图 3.20 群岛中的一间房子和它的上现蜃景。图片引自 <http://netcomm/news/showarticle.asp?intNWSAID=25722>。彩图见文前附录图表页的图 6。

3.3.3 具有渐变折射率的大气层

与渐变折射率的媒质中成像有关的一个有趣的现象,就是日出与日落的太阳不是圆形的现象(见图 3.21 以及本书文前附录图表页中的图 7)。用下面的方式解释就很容易理解。空气的折射率随着大气层的高度向外逐渐减小。将连续梯度变化的折射率近似成一系列有限数量的空气层(每一层有固定的折射率),则光线将如图 3.22 所示的那样弯曲,这样太阳(实际位于点 S)看上去就像在点 S' 处。因为这个原因,落日看上去显得扁了一些,并且造成白天的时间比没有大气层时长了 5min。显然,假如在月球表面,太阳在日出与日落时不仅看上去是白色的,而且是圆形的!



图 3.21 日落时太阳显示为不是圆形。
彩图见文前附录图表页的图 7。

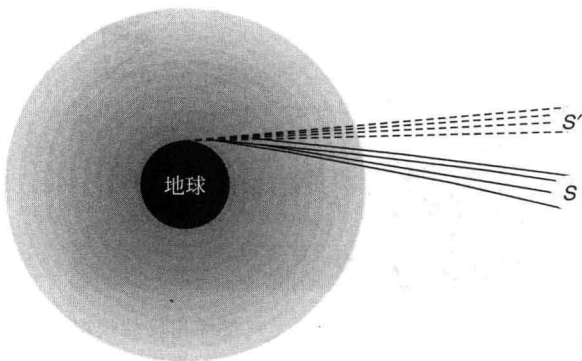


图 3.22 由于折射率的变化,由点 S 发出的光看上去好像来自点 S' 。

3.4 光线方程与它的解

在本节中将推导光线方程,方程的解可以给出非均匀媒质中精确的光线路径,并把讨论局限在折射率在一个方向上连续变化的特殊情况,这个方向假设为 x 轴方向。这样的媒质可以想象成一系列的具有不同折射率的薄层的极限。如前所述,对于连续变化的折射率媒质,乘积 $n(x)\cos\theta(x)$ 是光线的不变量,用 $\tilde{\beta}$ 表示

$$n(x)\cos\theta(x) = \tilde{\beta} \quad (3.24)$$

此外,对于连续变化的折射率媒质,图 3.12(a)所示的分段直线将形成图 3.12(b)所示的连续曲线。令 ds 表示曲线上的无限小的弧长,则

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dz)^2$$

或者

$$\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 1 \quad (3.25)$$

联系图 3.12(b),可得

$$\frac{dz}{ds} = \cos\theta = \frac{\tilde{\beta}}{n(x)} \quad (3.26)$$

则式(3.25)变为

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = \frac{n^2(x)}{\tilde{\beta}^2} - 1 \quad (3.27)$$

对于给定的 $n(x)$ 变化,对式(3.27)积分,可得到光线路径 $x(z)$;但为了方便,通常将式(3.27)对 z 微商

$$2 \frac{dx}{dz} \frac{d^2x}{dz^2} = \frac{1}{\tilde{\beta}^2} \frac{dn^2}{dx} \frac{dx}{dz}$$

或者

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{1}{2\tilde{\beta}^2} \frac{dn^2}{dx} \quad (3.28)$$

当折射率只与 x 相关时,式(3.27)和式(3.28)都是严格的光线方程。

例 3.7 考虑对式(3.28)的一个简单应用。考虑一个均匀媒质,其折射率为一常数。这样,式(3.28)的右侧为零,可得

$$\frac{d^2x}{dz^2} = 0$$

将上式对 z 积分两次,得到

$$x = Az + B$$

这是一个直线方程,与均匀媒质中的光线方程一致。

例 3.8 考察式(3.29)所描述的折射率变化的媒质中的光线路径

$$n(x) = n_0 + kx \quad (3.29)$$

对于上面的折射率变化,光线方程(式(3.28))取下面的形式

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{1}{2\tilde{\beta}^2} \frac{dn^2}{dx} = \frac{k}{\tilde{\beta}^2} (n_0 + kx)$$

或者

$$\frac{d^2 X}{dz^2} = \kappa^2 X(z) \quad (3.30)$$

式中

$$X \stackrel{\text{def}}{=} x + \frac{n_0}{k} \quad \text{及} \quad \kappa = \frac{k}{\tilde{\beta}} \quad (3.31)$$

则光线路径为

$$x(z) = -\frac{n_0}{k} + C_1 e^{\kappa z} + C_2 e^{-\kappa z} \quad (3.32)$$

式中常数 C_1 和 C_2 由初始条件确定。假设在 $z=0$ 处, 光线由 $x=x_1$ 处发出, 与 z 轴之间的夹角为 θ_1 , 则

$$\begin{aligned} x(z=0) &= x_1 \\ \left. \frac{dx}{dz} \right|_{z=0} &= \tan \theta_1 \end{aligned}$$

经过基本的运算后, 可得

$$C_1 = \frac{1}{2} \left[x_1 + \frac{1}{k} (n_0 + n_1 \sin \theta_1) \right] \quad (3.33)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left[x_1 + \frac{1}{k} (n_0 - n_1 \sin \theta_1) \right] \quad (3.34)$$

式中 $n_1 = n_0 + kx$ 表示在 $x=x_1$ 处的折射率值, 计算中还用到了

$$\tilde{\beta} = n_1 \cos \theta_1 \quad (3.35)$$

图 3.13 所示为式(3.32)给出的光线路径, 其中 $x_1 = 1.5 \text{ m}$, $n_1 = 1.00026$ 以及 $k \approx 1.234 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ 。

3.4.1 抛物线型折射率变化媒质中的光线路径

考察式(3.36)所描述的抛物线型折射率分布的媒质

$$n^2(x) = n_1^2 - \gamma^2 x^2 \quad (3.36)$$

根据式(3.27)来确定光线路径。式(3.27)可以改写为

$$\int \frac{dx}{\sqrt{n^2(x) - \tilde{\beta}^2}} = \pm \frac{1}{\tilde{\beta}} \int dz \quad (3.37)$$

对式(3.36)替换 $n^2(x)$, 可得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \pm \Gamma \int dz \quad (3.38)$$

式中

$$x_0 = \frac{1}{\gamma} \sqrt{n_1^2 - \tilde{\beta}^2} \quad (3.39)$$

$$\Gamma = \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} \quad (3.40)$$

令 $x = x_0 \sin \theta$, 并积分得

$$x = \pm x_0 \sin[\Gamma(z - z_0)] \quad (3.41)$$

选择原点为起始,使得 $z_0=0$ 。这样,光线路径的通解可以写为

$$x = \pm x_0 \sin \Gamma z \quad (3.42)$$

要在此提及,实际上,也可以根据式(3.28)求得光线路径。一种光波导的折射率分布通常写成以下形式^①

$$\begin{cases} n^2(x) = n_1^2 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right], & |x| < a \\ n^2(x) = n_2^2 = n_1^2 (1 - 2\Delta), & |x| > a \end{cases} \quad (3.43)$$

$|x| < a$ 的区域为波导的芯,而 $|x| > a$ 的区域一般指波导的包层。则有

$$\gamma = \frac{n_1 \sqrt{2\Delta}}{a} \quad (3.44)$$

对于典型的抛物线型折射率分布的光纤,有

$$n_1 = 1.5, \quad \Delta = 0.01, \quad a = 20 \mu\text{m} \quad (3.45)$$

给出

$$n_2 \approx 1.485, \quad \gamma \approx 1.0607 \times 10^4 \text{m}^{-1}$$

不同的 θ_1 的典型光线路径见图 3.23。显然,当满足 $n_2 < \tilde{\beta} < n_1$ 时,光线被导引在波导芯内。当 $\tilde{\beta} = n_2$ 时,光线在芯-包层边界处变为水平。对于 $\tilde{\beta} < n_2$ 的情况,光线以一定角度入射到芯-包层边界,并被折射出去。因此,可以将光线分为

$$\begin{aligned} n_2 < \tilde{\beta} < n_1 &\Rightarrow \text{导引光线} \\ \tilde{\beta} < n_2 &\Rightarrow \text{折射光线} \end{aligned} \quad (3.46)$$

如图 3.23 所示,3 条光线分别对应于

$$z_0 = 0, \quad \theta_1 = 4^\circ, \quad 8.13^\circ, \quad 20^\circ$$

相应的 $\tilde{\beta}$ 的取值约为 1.496 ($> n_2$), 1.485 ($= n_2$) 和 1.410 ($< n_2$)。最后一组光线在芯-包层边界经历了折射。容易看出,正弦摆动的光线的空间周期长度 z_p 为

$$z_p = \frac{2\pi}{\Gamma} = \frac{2\pi a \cos \theta_1}{\sqrt{2\Delta}} \quad (3.47)$$

如图 3.23 所示的摆动的两根光线(它们的角度为 $\theta_1 = 4^\circ, 8.13^\circ$), z_p 的取值分别为 0.8864mm 和 0.8796mm。实际上,当做傍轴近似时, $\cos \theta_1 \approx 1$, 则所有的光线具有相同的空间周期。如图 3.24(译者改)所示,绘出了一组典型的傍轴光线路径情况,这组入射光线在入射端沿 z 轴平行入射,不同的光线对应于不同的 $\tilde{\beta}$ 值。

在这里,有以下 4 点特性要特别指出。

(1) 在傍轴近似($\tilde{\beta} \approx n_1$)中,所有平行入射的光线都将聚焦于某一点。因此,这种媒质就像聚焦透镜一样,其焦距为

$$f \approx \frac{\pi}{2} \frac{a}{\sqrt{2\Delta}} \quad (3.48)$$

(2) 以与轴线不同角度入射的光线(见图 3.24(译者改)中由点 P 发射的光线)将被“陷”在媒质中,因此,这类媒质扮演着“向导”的角色。实际上,这类媒质被称作光波导。在

^① 在这种媒质中的光线路径具有非常重要的意义,以这种抛物线型折射率分布的光纤广泛地应用于光纤通信系统中(见 27.7 节)。

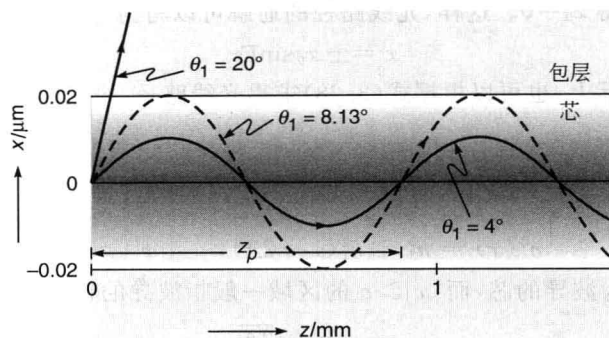


图 3.23 在一抛物线型折射率分布的媒质中的一组典型光线路径。分别对应式(3.45)的参数 $\theta_1 = 4^\circ, 8.13^\circ$ 和 20° 。

近代,对光波导的研究形成了一个人们极感兴趣的课题。

(3) 光线路径是只可以存在于 $\tilde{\beta}$ 小于或等于 $n(x)$ 的区域(见式(3.26))。更进一步,当 $n(x) = \tilde{\beta}$ 时, $dx/dz = 0$ (即光线平行于 z 轴)。这个结论可以由式(3.27)得出。

(4) 在这种媒质中,光线将如图 3.24 所示的那样,周期性地聚焦与发散。在傍轴近似下,所有由点 P 发出的光线都将聚焦于点 Q 。结合例 3.3 的讨论,还可以得出,所有由点 P 到点 Q 的光线都必将经历相同的时间。从物理上看,虽然光线 PLQ 相比 PMQ 传输了更长的路程,但它传输的路径处于平均上较“低”的折射率区域,从而较大的“平均速率”将补偿较长的传输路程,所以,所有的光线在波导内传播一段距离经历了相同的时间(精确计算见 3.4.2 节)。正是由于这个原因,抛物线型折射率光纤被广泛地应用于光纤通信系统(局域网(译者注))中(详见 27.7 节)。

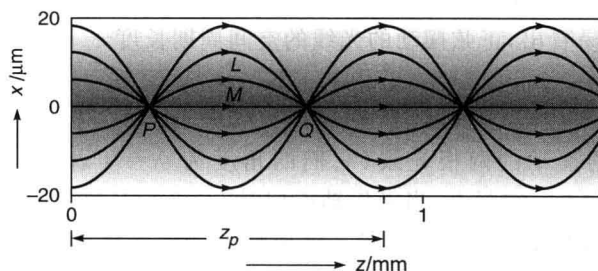


图 3.24 在抛物线型媒质中的傍轴光线路径。注意这束光周期性地聚焦和发散。

这里要提一下渐变折射率透镜(GRIN),其特点是折射率沿着横向以抛物线型变化。GRIN 透镜现在已商用,而且应用广泛(见图 3.25)。比如,GRIN 透镜可以用来将激光二极管输出的光束耦合入光纤。这样的 GRIN 透镜长度为 $z_p/4$ (见图 3.25(译者改));典型的 z_p 约为几厘米,而透镜的直径只有几毫米。这样小的透镜有许多用途。同样地,具有 $z_p/2$ 的 GRIN 透镜可以实现从一个透镜一端到另一个透镜一端的准直光传输。

3.4.2 抛物线型折射率波导中光线传播时间的计算

在本节中将计算一条光线在如式(3.36)所描述的抛物线型折射率光波导内通过一段距

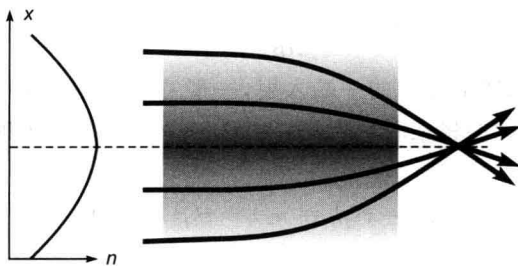


图 3.25 具有抛物线型折射率变化的渐变折射率透镜。该透镜可以像普通透镜一样聚焦光束。此图引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Refractive_index。彩图见文前附录图表页的图 8。

离所用的时间,这一计算在光纤通信系统中是非常重要的。正如 3.4.1 节讨论的一样,(在光波导芯内)光线路径由下式给出

$$x = x_0 \sin \Gamma z \quad (3.49)$$

式中 x_0 与 Γ 已在式(3.39)和式(3.40)中定义过。令 $d\tau$ 表示光线传播一段长度 ds 所需的时间(见图 3.12(b))

$$d\tau = \frac{ds}{c/n(x)} \quad (3.50)$$

式中 c 是自由空间的光速。又由

$$n(x) \frac{dz}{dx} = \tilde{\beta}$$

(见式(3.26))可将式(3.50)写为

$$d\tau = \frac{1}{c\tilde{\beta}} n^2(x) dz = \frac{1}{c\tilde{\beta}} (n_1^2 - \gamma^2 x^2) dz$$

或者

$$d\tau = \frac{1}{c\tilde{\beta}} (n_1^2 - \gamma^2 x_0^2 \sin^2 \Gamma z) dz \quad (3.51)$$

式中最后一步的推导用到了式(3.49)。这样,如果 $\tau(z)$ 表示光线沿着波导传播一段距离 z 所需的时间,则

$$\begin{aligned} \tau(z) &= \frac{n_1^2}{c\tilde{\beta}} \int_0^z dz - \frac{\gamma^2 x_0^2}{c\tilde{\beta}} \int_0^z \frac{1 - \cos(2\Gamma z)}{2} dz \\ &= \frac{1}{c\tilde{\beta}} \left(n_1^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 x_0^2 \right) z + \frac{\gamma^2 x_0^2}{2c\tilde{\beta}} \frac{1}{2\Gamma} \sin 2\Gamma z \end{aligned}$$

或者

$$\tau(z) = \frac{1}{2c\tilde{\beta}} (n_1^2 + \tilde{\beta}^2) z + \frac{(n_1^2 - \tilde{\beta}^2)}{4c\gamma} \sin 2\Gamma z \quad (3.52)$$

式中用到了式(3.39)。当 $\tilde{\beta} = n_1$ (对应于沿 z 轴的光线)时,有

$$\tau(z) = \frac{z}{c/n_1} \quad (3.53)$$

这个结果是可以预期的,因为这条光线总是以 c/n_1 的速度传播。对于很大的 z 值,式(3.52)右侧的第 2 项可以忽略,从而可以将耗时写为

$$\tau(z) = \frac{1}{2c\tilde{\beta}}(n_1^2 + \tilde{\beta}^2)z \quad (3.54)$$

假如现在有一个光脉冲从波导的一端入射,一般它会激励出大量光线。既然不同的光线将经历不同的时间,则脉冲将在时域展宽。对于一个抛物线型折射率光波导,这种脉冲展宽为

$$\Delta\tau = \tau(\tilde{\beta} = n_2) - \tau(\tilde{\beta} = n_1)$$

或者

$$\Delta\tau = \frac{z}{2c} \frac{(n_1 - n_2)^2}{n_2} \approx \frac{zn_2}{2c} \Delta^2 \quad (3.55)$$

式中最后一步假设

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_2} \quad (3.56)$$

对于式(3.45)的参数,可得

$$\Delta\tau \approx 0.25\text{ns/km} \quad (3.57)$$

在第 27 章中将采用这一结果。

例 3.9 考虑在式(3.58)所描述的折射率变化的媒质中的光线路径

$$\begin{cases} n^2(x) = n_1^2, & x < 0 \\ n^2(x) = n_1^2 - gx, & x > 0 \end{cases} \quad (3.58)$$

在 $x > 0$ 的区域, $n^2(x)$ 随 x 线性减小,则式(3.28)取以下形式

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{g}{2\tilde{\beta}^2}$$

此方程的通解为

$$x(z) = -\frac{g}{4\tilde{\beta}^2}z^2 + K_1z + K_2 \quad (3.59)$$

如图 3.26 所示,考虑一由原点入射的光线($x=0, z=0$),则

$$K_2 = 0, \quad \tilde{\beta} = n_1 \cos\theta_1 \quad (3.60)$$

进而

$$\left. \frac{dx}{dz} \right|_{z=0} = K_1 = \tan\theta_1 \quad (3.61)$$

因此,光线路径由下式描述

$$\begin{cases} x(z) = (\tan\theta_1)z, & z < 0 \\ x(z) = -\frac{gz}{4\tilde{\beta}^2}(z - z_0), & 0 < z < z_0 \\ x(z) = -\frac{gz_0}{4\tilde{\beta}^2}(z - z_0), & z > z_0 \end{cases} \quad (3.62)$$

式中

$$z_0 = \frac{2n_1^2}{g} \sin 2\theta_1$$

因此,在 $0 < z < z_0$ 的区域内,光线路径是抛物线。图 3.26 绘出了对应于以下参数的典型光线路径

$$n_1 = 1.5, \quad g = 0.1 \text{ m}^{-1}$$

这些不同光线对应于不同的角度

$$\theta_1 = \frac{\pi}{9}, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{3}$$

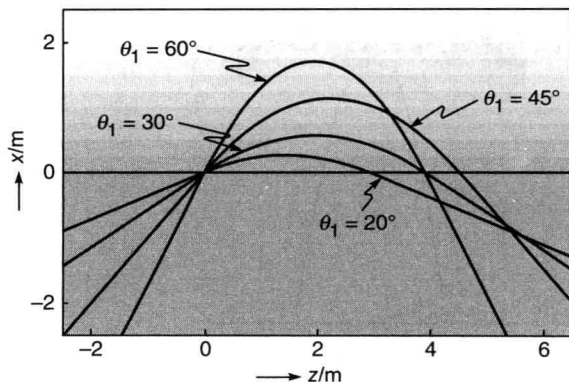


图 3.26 由式(3.58)描述的媒质中,抛物线光线路径(对应于 $\theta_1 = 20^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$)。在 $x < 0$ 的区域,光线路径是直线。

3.4.3 自电离层的反射

太阳辐射中的紫外线会造成大气层中的各组分气体电离,从而形成众所周知的电离层。在高度低于 60km 时,这种电离几乎可以忽略。由于在电离层中存在自由电子,其折射率由式(3.63)给出(见式(7.76))

$$n^2(x) = 1 - \frac{N_e(x)q^2}{m\epsilon_0\omega^2} \quad (3.63)$$

式中: $N_e(x)$ 为电子数密度,电子数/单位体积, m^{-3} ; x 为距地面的高度, m ; ω 为电磁波的角频率, rad/s ; q 为电子电量, $\approx 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$; m 为电子质量, $\approx 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$; ϵ_0 为真空中介电常数, $\approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$ 。^①

这样,电子数密度从 0 开始增加(从高度 60km 开始算起),而折射率开始减小,则电离层中的光线路径将与例 3.9 中描述的十分相似。

定义一个 n_T 表示光线经历转折点(此时光线水平)时的折射率,则(见图 3.27)

$$\tilde{\beta} = \cos\theta_1 = n_T \quad (3.64)$$

这样,假设电磁信号由点 A(以角度 θ_1)发出,在点 B 被接收到,那么可以确定反射电磁波束的电离层的折射率(进而确定电子数密度)。这就是短波无线电($\lambda = 20\text{m}$)从一个城市(比如伦敦)以一个特定角度发送广播,经电离层的反射,会到达另一个城市(比如新德里)的原理。例如对于正入射, $\theta = \pi/2$, 以及 $n_T = 0$, 预示着

$$N_e(x_T) = \frac{m\epsilon_0\omega^2}{q^2} \quad (3.65)$$

在一个典型的实验中,一个电磁脉冲(0.5~20MHz)沿竖直向上方向发射,经历一个时

^① 原书为 $\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$

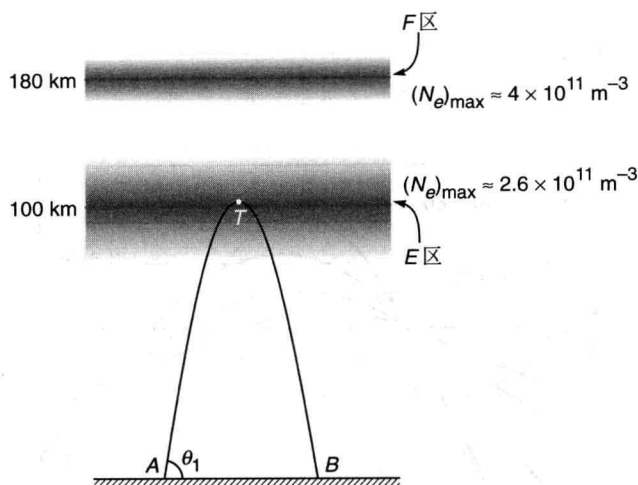


图 3.27 在电离层的 E 区反射,点 T 表示转折点。灰度的变化表示电子数密度的变化。

延 Δt 接收到回波,则

$$\Delta t \approx \frac{2h}{c} \quad (3.66)$$

式中 h 表示经历反射的高度。因此,如果电磁脉冲经电离层的 E 层(大约 100km 高)反射,将在 $670\mu\text{s}$ 后接收到回波。反之,可以通过测量时延,也可以根据式(3.67)来确定(脉冲被反射)高度

$$h \approx \frac{c}{2} \Delta t \quad (3.67)$$

图 3.28 绘出了电磁脉冲频率与从 E 区到 F 区反射的等价高度(由回声的时延得出)的关系。如图 3.28 所示,当 $\nu = 4.6 \times 10^6 \text{ Hz}$ 时,回声突然从 100km 高度消失,有

$$N_e(100\text{km}) \approx \frac{m\epsilon_0 (2\pi\nu)^2}{q^2} \approx \frac{9.11 \times 10^{-31} \times 8.854 \times 10^{-12} \times (2\pi \times 4.6 \times 10^6)^2}{(1.6 \times 10^{-19})^2} \\ \approx 2.6 \times 10^{11} \text{ 个电子/m}^3$$

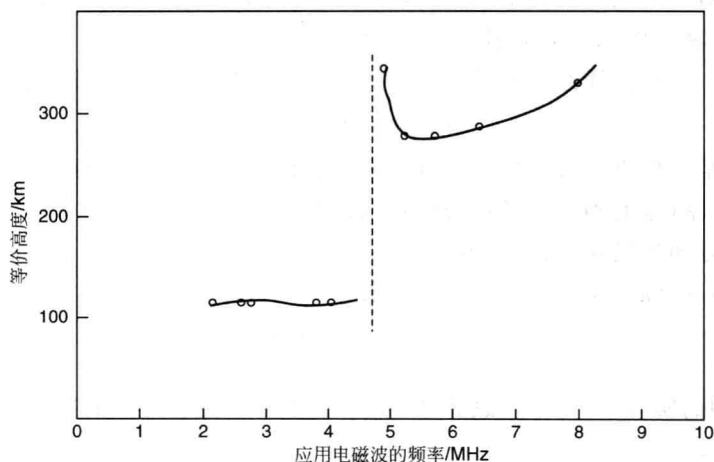


图 3.28 电磁脉冲频率与从 E 区到 F 区反射的等价高度的关系(来自参考文献[9])

如果进一步增大频率,电磁回声从电离层的 F 区又出现了。如果要知道更多的关于电离层研究的细节,可以参阅 S. K. Mitra 教授撰写的易于理解的多本教材之一(见参考文献[9])。

例 3.10 把下式所描述的折射率分布的媒质中的光线方程的解

$$n^2(x) = n_0^2 + n_2^2(1 - e^{-\alpha x}) \quad (3.68)$$

代入式(3.27),可得

$$\pm dz = \frac{\tilde{\beta} dx}{[(n_0^2 + n_2^2 - \tilde{\beta}^2) - n_2^2 e^{-\alpha x}]^{1/2}} = \frac{\tilde{\beta} e^{\alpha x/2} dx}{n_2 [K^2 e^{\alpha x} - 1]^{1/2}}$$

或者

$$\pm dz = \frac{2\tilde{\beta}}{K\alpha n_2} \frac{d\Phi}{[\Phi^2 - 1]^{1/2}} \quad (3.69)$$

式中

$$K = \frac{1}{n_2}(n_0^2 + n_2^2 - \tilde{\beta}^2)^{1/2} \quad (3.70)$$

$$\Phi(x) = K^2 e^{\alpha x/2} \quad (3.71)$$

式(3.69)中的“+”和“-”分别对应于向上和向下传播的光线。又

$$\tilde{\beta} = n_1 \cos \theta_1 \quad (3.72)$$

式中 θ_1 为光线起始时,在 $x=x_1, z=0$ 以及 $n_1=n(x_1)$ 情况下与 z 轴的夹角。利用初等积分,可得光线路径公式

$$x(z) = \frac{2}{\alpha} \ln \left[\frac{1}{K} \cosh \gamma(C \pm z) \right] \quad (3.73)$$

式中

$$\gamma = \frac{\alpha K n_2}{2\tilde{\beta}} \quad (3.74)$$

既然在 $x=x_1$ 时, $z=0$ (起始点),得

$$C = \frac{1}{\gamma} \operatorname{arccosh}(K e^{\alpha x_1/2}) \quad (3.75)$$

还可得

$$K e^{\alpha x_1/2} = \left(\frac{n_0^2 + n_p^2 - \tilde{\beta}^2}{n_0^2 + n_p^2 - n_1^2} \right)^{1/2} \quad (3.76)$$

由 $x=x_1$ 处水平发射的光线, $C=0$, 满足此条件的典型光线(对于不同的 θ_1 角)的路径如图 3.14 和图 3.15 所示。

3.5 光线在各向同性媒质和各向异性媒质的分界面的折射

在本节中将根据费马原理来确定光线入射到一个各向同性媒质与各向异性媒质分界面时,其折射光线的方向^①。在各向同性媒质中,在各个方向上,媒质的性质保持相同,其典型物质如玻璃、水、空气。然而,在各向异性媒质中,某些性质(如光速)在各个方向上可能会有

^① 将费马原理应用于各向异性媒质的证明在 Newcomb 的书(见参考文献[10])中给出,这个证明相当复杂。关于双轴媒质中光线路径的讨论,见参考文献[10]。

不同。在第22章中,将更详细地讨论各向异性媒质。在这里,只做如下讨论:当光线投射到一块像方解石这类晶体上时,一般来说,它将分开成两束光线,一束称为寻常光线,另一束称为非常光线。寻常光线的传播速度在各个方向上保持相同,因此,它遵守斯涅耳定律(Snell's law)。而非常光线却不如此。在此根据费马原理来研究一束光从各向同性媒质中入射到各向异性媒质中的折射规律。其中两类媒质均假设为均匀的。

在单轴媒质中,非常光线的折射率变化由下式给出(见式(22.121)):

$$n^2(\theta) = n_o^2 \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta \quad (3.77)$$

式中 n_o 和 n_e 是晶体的两个常数, θ 表示光线与光轴的夹角。很显然,当非常光线的传播方向与光轴方向一致时(即 $\theta=0$ 时),其光速为 c/n_o ,而当其传播方向与光轴方向垂直时($\theta=\pi/2$),光速为 c/n_e 。

3.5.1 光轴垂直于分界面的情况

首先考虑最简单的情况,即光轴方向垂直于分界面的情况。如图3.29所示,光线从点A到点B的光程为

$$L_{op} = n_1 [h_1^2 + (L-x)^2]^{1/2} + n(\theta) [h_2^2 + x^2]^{1/2} \quad (3.78)$$

式中 n_1 为媒质 I 的折射率,此外,假设入射光线和光轴方向在一个平面内。又由

$$\cos \theta = \frac{h_2}{(h_2^2 + x^2)^{1/2}}, \quad \sin \theta = \frac{x}{(h_2^2 + x^2)^{1/2}}$$

可得

$$L_{op} = n_1 [h_1^2 + (L-x)^2]^{1/2} + (n_o^2 h_2^2 + n_e^2 x^2)^{1/2} \quad (3.79)$$

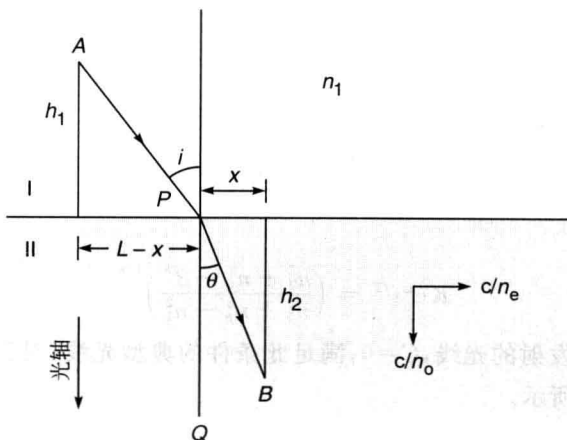


图 3.29 当单轴晶体的光轴垂直于分界面时,非常光线的折射方向。

对于真实光线,必然有

$$\frac{dL_{op}}{dx} = 0$$

意味着

① 原文为 $L_{op} = n_1 [h_1^2 + (L-x)^2]^{1/2} + [n_o^2 h_L^2 + n_e^2 x^2]^{1/2}$

$$\frac{n_1(L-x)}{[h_1^2 + (L-x)^2]^{1/2}} = \frac{n_e^2 x}{(n_o^2 h_2^2 + n_e^2 x^2)^{1/2}}$$

或者

$$n_1 \sin i = \frac{n_e^2 \tan r}{(n_o^2 + n_e^2 \tan^2 r)^{1/2}} \quad (3.80)$$

这里用到了以下关系

$$\text{折射角 } r = \theta, \quad \tan r = \frac{x}{h_2}$$

根据简单的计算,可得

$$\tan r = \frac{n_o n_1 \sin i}{n_e \sqrt{n_e^2 - n_1^2 \sin^2 i}} \quad (3.81)$$

根据这个公式,可以计算(当光轴垂直于分界面时)给定任意入射角时的折射角。作为一个简单的例子,假设第一个介质是空气, $n_1 = 1$, 则

$$\tan r = \frac{n_o \sin i}{n_e \sqrt{n_e^2 - \sin^2 i}} \quad (3.82)$$

假设第二个介质是方解石,则

$$n_o = 1.65836, \quad n_e = 1.48641$$

由 $i = 45^\circ$, 可得

$$r \approx 31.1^\circ$$

容易看出,当 $n_o = n_e = n_2$ 时,式(3.80)还原为

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \quad (3.83)$$

它就是斯涅耳定律(Snell's law)。

3.5.2 光轴在入射面内的情况^①

下面考虑更加普遍的情况。如图 3.30 所示,光轴与法线之间的夹角为 ϕ , 且光轴在入射面内。在这里需要提及,一般情况下,非常光线不一定也在入射面内。但可以证明,当光轴在入射面内时,非常光线也在入射面内。在目前的计算中,正是假设在这种情况下,来计算给定入射角时的折射光线的方向。如图 3.30 所示,从点 A 到点 B 的光程为

$$L_{\text{op}} = n_1 [h_1^2 + (L-x)^2]^{1/2} + n(\theta) (h_2^2 + x^2)^{1/2} \quad (3.84)$$

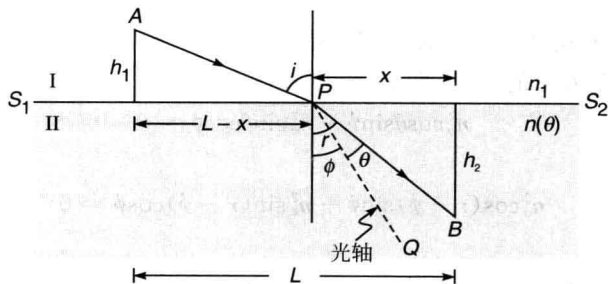


图 3.30 当单轴晶体的光轴在入射面内,且与法线之间的夹角为 ϕ 时,非常光线的折射方向。

^① 第一次阅读可略过。

由 $\theta = r - \phi$, 有

$$\begin{aligned} n^2(\theta) &= n_o^2 \cos^2(r - \phi) + n_e^2 \sin^2(r - \phi) \\ &= n_o^2 (\cos r \cos \phi + \sin r \sin \phi)^2 \\ &\quad + n_e^2 (\sin r \cos \phi - \cos r \sin \phi)^2 \\ &= n_o^2 \left[\frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + x^2}} \cos \phi + \frac{x}{\sqrt{h_2^2 + x^2}} \sin \phi \right]^2 \\ &\quad + n_e^2 \left[\frac{x}{\sqrt{h_2^2 + x^2}} \cos \phi - \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + x^2}} \sin \phi \right]^2 \end{aligned}$$

则

$$n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{h_2^2 + x^2}} [n_o^2 (h_2 \cos \phi + x \sin \phi)^2 + n_e^2 (x \cos \phi - h_2 \sin \phi)^2]^{1/2} \quad (3.85)$$

$$L_{\text{op}} = n_1 [h_1^2 + (L - x)^2]^{1/2} + [n_o^2 (h_2 \cos \phi + x \sin \phi)^2 + n_e^2 (x \cos \phi - h_2 \sin \phi)^2]^{1/2} \quad (3.86)$$

对于实际光线路径,有

$$\frac{dL_{\text{op}}}{dx} = 0$$

意味着

$$\frac{n_1(L - x)}{[h_1^2 + (L - x)^2]^{1/2}} = \frac{n_o^2 (h_2 \cos \phi + x \sin \phi) \sin \phi + n_e^2 (x \cos \phi - h_2 \sin \phi) \cos \phi}{[n_o^2 (h_2 \cos \phi + x \sin \phi)^2 + n_e^2 (x \cos \phi - h_2 \sin \phi)^2]^{1/2}}$$

或者

$$n_1 \sin i = \frac{n_o^2 \cos \theta \sin \phi + n_e^2 \sin \theta \cos \phi}{(n_o^2 \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \quad (3.87)$$

对于给定的 i 和 ϕ , 解上述方程, 可得 θ , 从而可得折射角 $r (= \theta + \phi)$ 。

以下几种特殊情况值得注意。

(1) 当 $n_o = n_e = n_2$ 时, 各向异性媒质变为各向同性媒质, 式(3.87)可以简化为

$$n_1 \sin i = n_2 \sin(\theta + \phi) = n_2 \sin r$$

这就是斯涅耳定律(Snell's law)。

(2) 当 $\phi = 0$ 时, 即光轴垂直于分界面, 式(3.87)可变为

$$n_1 \sin i = \frac{n_e^2 \sin \theta}{(n_o^2 \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} = \frac{n_e^2 \sin r}{(n_o^2 \cos^2 r + n_e^2 \sin^2 r)^{1/2}} \quad (3.88)$$

其中用到了 $r = \theta$, 式(3.88)与式(3.80)是一致的。

(3) 最后, 考虑正入射的情况, 即 $i = 0$, 则式(3.87)给出

$$n_o^2 \cos \theta \sin \phi + n_e^2 \sin \theta \cos \phi = 0$$

或者

$$n_o^2 \cos(r - \phi) \sin \phi + n_e^2 \sin(r - \phi) \cos \phi = 0$$

或者

$$\cos r (n_o^2 \cos \phi \sin \phi - n_e^2 \sin \phi \cos \phi) + \sin r (n_o^2 \sin^2 \phi + n_e^2 \cos^2 \phi) = 0$$

或者

$$\tan r = \frac{(n_e^2 - n_o^2) \cos \phi \sin \phi}{n_o^2 \sin^2 \phi + n_e^2 \cos^2 \phi} \quad (3.89)$$

由式(3.89)可得,通常 $r \neq 0$ (见图 3.31)。这里要指出:对于正入射,无论光轴的方向如何,这个结论总是正确的,且折射光线(非常光线)位于法线与光轴方向组成的平面内。此外,对于正入射,当晶体绕着入射光线旋转时,折射光线也同时旋转,构成一个圆锥面(见图 22.18(b))。

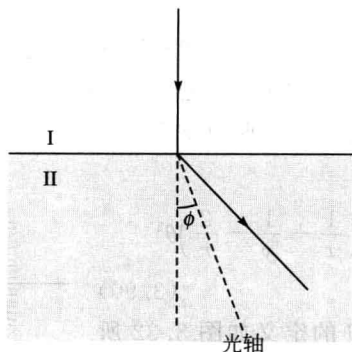


图 3.31 对于正入射,折射光线通常经历有限的偏折。然而,当光轴平行或者垂直于分界面时,折射光线并不偏折。

回到式(3.89),注意到:当光轴垂直于分界面($\phi=0$),或者光轴平行于分界面,且位于入射面内时($\phi=\pi/2$),则 $r=0$,即折射光线不偏离法线。

小 结

- 有些许改进的费马原理:两点之间的真实路径是其光程相对于路径的变分是平稳的那一条。
- 折射定律,即,斯涅耳定律($n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2$,式中 ϕ_1 和 ϕ_2 表示入射角和折射角),可以由费马原理推导得出。
- 对于折射率变化为 $n(x)$ 的非均匀媒质,其光线路径 $x(z)$ 要满足 $n(x) \cos \theta(x)$ 的乘积保持常数,式中 $\theta(x)$ 是光线与 z 轴的夹角。这个常数用 $\tilde{\beta}$ 表示,称为光线不变量。精确的光纤路径由下面两个方程之一求解

$$\frac{dx}{dz} = \pm \frac{\sqrt{n^2(x) - \tilde{\beta}^2}}{\tilde{\beta}}$$

或者

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{1}{2\tilde{\beta}^2} \frac{dn^2(x)}{dx}$$

式中不变量 $\tilde{\beta}$ 由光线的初始条件确定。

- 通过解光线方程得到光线路径,可以用来研究海市蜃楼(下现蜃景)、上现蜃景现象,以及经电离层的反射现象。
- 在抛物线折射率分布为 $n^2(x) = n_1^2 - \gamma^2 x^2$ 的媒质中,光线路径是按照正弦规律摆动的

$$x = \pm x_0 \sin \Gamma z$$

式中 $\Gamma = \frac{\gamma}{\tilde{\beta}}$, $x_0 = \frac{1}{\gamma} \sqrt{n_1^2 - \tilde{\beta}^2}$, 并且假设光线入射时, $x=0, z=0$ 。以不同角度入射

的光线经历较长距离的传播后,传播时间近似相等。

- 费马原理可以用来研究光线在各向同性与各向异性媒质分界面的折射现象。

习 题

3.1 习题 3.1 和习题 3.2 都将根据费马原理来推导球面镜傍轴成像的规律。

考虑一个物点 O 位于一个曲率中心在点 C 的凹面镜前,令另一点 Q 在系统的轴线上。

根据如同例 3.3 相似的方法,证明其光程 L_{op}

($=\overline{OS}+\overline{SQ}$)可以近似为

$$L_{op} \approx x + y + \frac{1}{2}r^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{r}\right)\theta^2 \quad (3.90)$$

式中距离 x, y 和 r 以及 θ 的定义如图 3.32 所示,假设 θ 很小。确定傍轴的像点,并证明结果与球面成像公式一致

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{R} \quad (3.91)$$

式中 u 和 v 是物距和像距, R 是曲率半径。符

号采用传统规定,即在点 P 右侧为正,点 P 左侧为负。

3.2 费马原理也可以用来确定当物成一虚像时的傍轴像点。考察一凸面镜 SPM (见图 3.33)前面的物点 O 。假设光程 $L_{op}=\overline{OS}-\overline{SQ}$,负号是由于在点 S 的光线指向点 Q 的反向(见例 3.4)。证明

$$L_{op} \approx \overline{OS} - \overline{SQ} \approx x - y + \frac{1}{2}r^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{2}{r}\right)\theta^2 \quad (3.92)$$

式中距离 x, y 和 r 以及 θ 的定义如图 3.33 所示。证明在 $y=y_0$ 处的傍轴像点由式(3.93)决定

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y_0} = -\frac{2}{r} \quad (3.93)$$

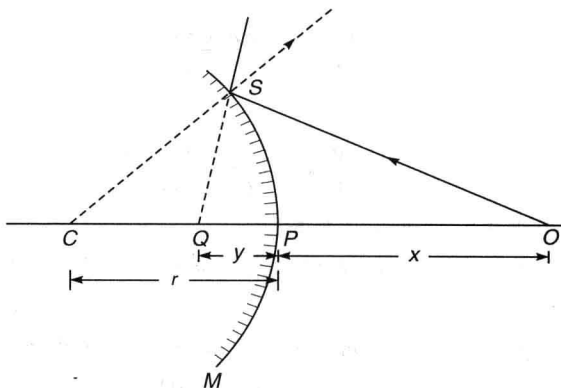


图 3.33 凸面镜的傍轴成像

这与式(3.91)一致,只是 u 为正值,而像距 v 与曲率半径为负,这是因为像点与曲率中心在点 P 的左方。

3.3 续习题 3.2,根据费马原理确定:对于曲率半径为 R 的凹面镜,当物点距离小于 $R/2$ 时的球面镜成像公式。

3.4 考察将折射率分别为 n_1 和 n_2 的媒质分开的凹折射面 SPM ,前面一物点 O 的成像情况(见图 3.34)。 C 表示曲率中心。这种情况下,成像为一虚像。令点 Q 为光轴上的任意一点。现在考虑光程 $L_{op} = n_1 \overline{OS} - n_2 \overline{SQ}$ 。证明:

$$L_{op} = n_1 \overline{OS} - n_2 \overline{SQ} \approx n_1 x - n_2 y - \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{n_2}{y} - \frac{n_1}{x} - \frac{n_2 - n_1}{r} \right) \theta^2 \quad (3.94)$$

再证明式(3.94)与傍轴成像方程式(3.10)一致。请注意: u, v 和 R 均为负值,因为它们都位于折射面的左边。

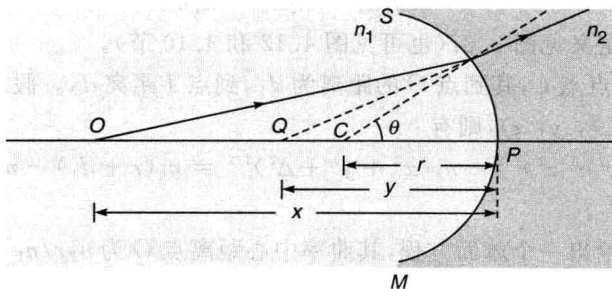


图 3.34 凹折射面 SPM 的傍轴成像

3.5 将一个椭圆沿其主轴旋转,得到一个旋转椭球。利用费马原理证明,只要椭圆的偏心率等于 n_1/n_2 ,则所有平行于主轴的光线都将聚焦于椭球的一个焦点上(见图 3.35)。

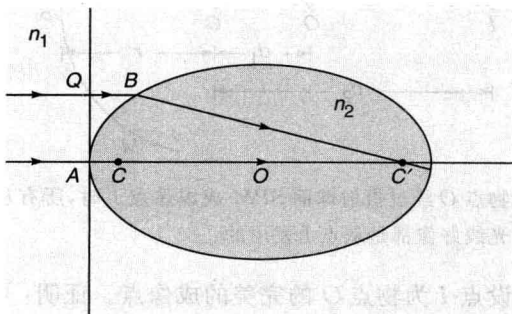


图 3.35 只要椭圆的偏心率等于 n_1/n_2 ,则所有平行于旋转椭球主轴的光线都将聚焦于椭球的一个焦点上

(提示:从下面的关系入手

$$n_2 \overline{AC'} = n_1 \overline{QB} + n_2 \overline{BC}$$

并证明点 B (其坐标是 x 和 y)位于椭圆的边缘上。)

3.6 点 C 是半径为 R 的折射球面的中心(见图 3.36),点 P_1 与点 P_2 是一直径上距离中心等距的两点。(1)求出光程 $\overline{P_1 O} + \overline{O P_2}$ 与 θ 的函数关系;(2)求出球面反射真实光线

P_1OP_2 对应的 θ 。

- 3.7 SPM 是将折射率分别为 n_1 和 n_2 的媒质分开的球形折射面(见图 3.37)。考虑物点 O 在点 I 成一虚像。假设由点 O 发出的所有光线看上去就如同都由点 I 发出的一样,从而在点 I 形成一个完美的虚像。根据费马原理,必然有

$$n_1 \overline{OS} - n_2 \overline{SI} = n_1 \overline{OP} - n_2 \overline{PI}$$

式中点 S 是折射球面上的任意一点。假设上述方程右侧为零,证明折射界面是球面,且其半径为

$$r = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \overline{OP} \quad (3.95)$$

随后证明

$$n_1^2 d_1 = n_2^2 d_2 = n_1 n_2 r \quad (3.96)$$

式中 d_1, d_2 的定义见图 3.37(也可见图 4.12 和 4.10 节)。

[提示:考虑一点点 C ,其到点 O 的距离为 d_1 ,到点 I 距离 d_2 。假设点 O 为原点,并令点 S 的坐标为 (x, y, z) ,则有

$$n_1(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} - n_2(x^2 + y^2 + \Delta^2)^{1/2} = n_1(r + d_1) - n_2(r + d_2) = 0$$

式中 $\Delta = d_1 - d_2$ 。

上述方程给出一个球面方程,其曲率中心距离点 O 为 $n_2 r / n_1 (=d_1)$ 。]

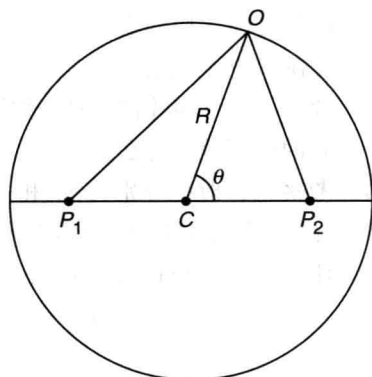


图 3.36 一个球面反射器

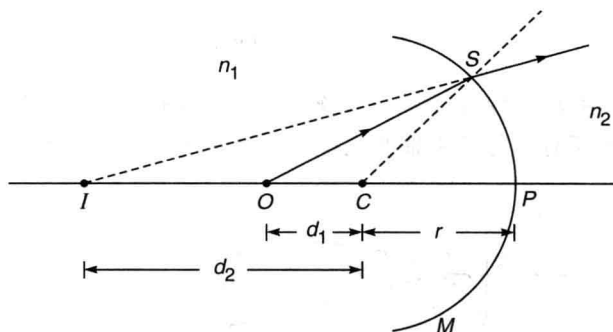


图 3.37 当物点 O 经过折射球面 SPM 成虚像点 I 时,所有从点 O 发出的光线好像都是从点 I 发出的。

- 3.8 如图 3.38 所示,假设点 I 为物点 O 的完美的成像点。证明:将折射率分别为 n_1 和 n_2 的媒质分开的折射面方程为

$$n_1(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} + n_2(x^2 + y^2 + (z_2 - z)^2)^{1/2} = n_1 z_1 - n_2(z_2 - z_1) \quad (3.97)$$

式中假设原点为点 O ,点 P 和点 I 的坐标分别假设为 $(0, 0, z_1)$ 和 $(0, 0, z_2)$ 。式(3.97)的曲面被称为笛卡儿卵形面。

- 3.9 对于折射率分布根据式(3.21)和式(3.22)变化的媒质,一条光线由 $x=0.43\text{m}$ 处,以与 z 轴成 $-\pi/60$ 方向发射(见图 3.14)。计算当光线变为水平时的 x 值。
- 3.10 对于折射率分布根据式(3.21)和式(3.22)变化的媒质,一条光线由 $x=2.8\text{m}$ 处发

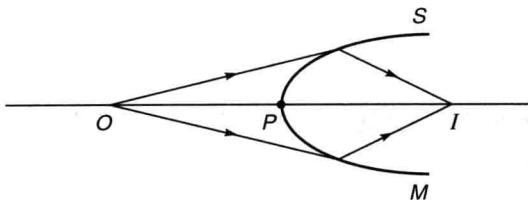


图 3.38 笛卡儿卵形面。所有由点 O 发出的光线将经过 SPM 面折射, 全部通过点 I 。

射, 且在 $x=0.2\text{m}$ 处变为水平方向 (见图 3.15)。计算光线在发射点处与 z 轴的夹角。

[答案: $\theta_1 \approx 19^\circ$]

3.11 考虑一个按照抛物线型变化的媒质, 其折射率变化如下

$$\begin{cases} n^2(x) = n_1^2 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right], & |x| < a \\ n^2(x) = n_1^2 (1 - 2\Delta) = n_2^2, & |x| > a \end{cases}$$

假设 $n_1 = 1.50, n_2 = 1.48, a = 50\mu\text{m}$ 。计算以下条件的 Δ 的值。

(1) 假设光线从光轴上的 $z=0$ 处发射 (即当 $z=0$ 时, $x=0$), 且其光线不变量分别为

$$\tilde{\beta} = 1.495, 1.490, 1.485, 1.480, 1.475, 1.470$$

计算每一种情况下光线初始时与光轴的夹角 (θ_1), 并画出每一条光线的路径。

计算出在每一种情况下光线变为水平的高度。

(2) 光线在 $z=0$ 平面正入射, 其起始位置分别在 $x=0, \pm 10\mu\text{m}, \pm 20\mu\text{m}, \pm 30\mu\text{m}, \pm 40\mu\text{m}$ 处。计算其光线不变量 $\tilde{\beta}$, 并对每一光线, 计算其焦距, 并定性地画出光线路径。

3.12 在一非均匀媒质中, 折射率分布由下式给出

$$\begin{cases} n^2(x) = 1 + \frac{x}{L}, & x > 0 \\ n^2(x) = 1, & x < 0 \end{cases}$$

写出经过点 $(0, 0, 0)$ 的在 $x-z$ 平面内的光线方程, 并证明此点光线与 x 轴的夹角为 45° 。

3.13 由式 (3.23) 给出的折射率分布的媒质, 证明式 (3.27) 可以写为以下形式

$$\pm \frac{\alpha K_1 n_2}{2\tilde{\beta}} dz = \frac{dG}{\sqrt{1-G^2}} \quad (3.98)$$

式中

$$K_1 = \frac{\sqrt{\tilde{\beta}^2 - n_0^2}}{n_2}, \quad G(x) = K_1 e^{\alpha x/2} \quad (3.99)$$

对式 (3.98) 积分, 可得光线路径。

3.14 考虑一个渐变折射率媒质, 其折射率分布由下式给出

$$n^2(x) = n_1^2 \text{sech}^2 gx \quad (3.100)$$

将其代入式 (3.27), 并积分, 可得

$$x(z) = \frac{1}{g} \text{arcsinh} \left[\frac{\sqrt{n_1^2 - \tilde{\beta}^2} \sin gz}{\tilde{\beta}} \right] \quad (3.101)$$

证明其空间周期

$$z_p = \frac{2\pi}{g}$$

与发射光线的起始角度无关(见图 3.39),并且所有光线沿 z 轴传播一段距离 z_p 后,所花的时间严格相等。

〔提示:在进行积分时,做替换 $\zeta = -\frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{n_1^2 - \tilde{\beta}^2}} \sinh gx$ 〕

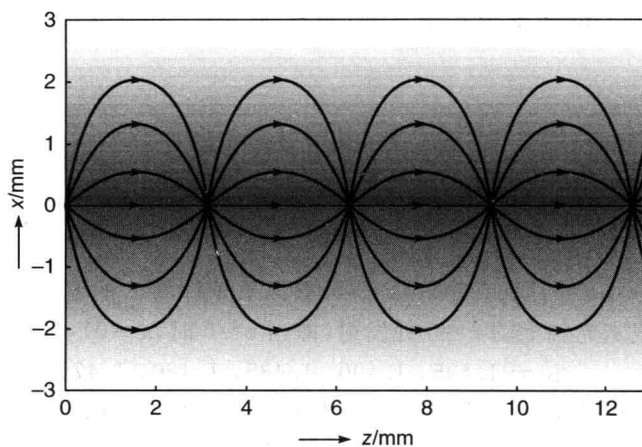


图 3.39 由式(3.100)决定的渐变折射率分布的媒质中的光线路径

参考文献和推荐读物

1. M. Born and E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon Press, Oxford, UK, 1975.
2. A.K. Ghatak and K. Thyagarajan, Contemporary Optics, Plenum Press, New York, (1978). [Reprinted by Macmillan India, New Delhi].
3. R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, The Feynman Lectures on Physics, Vol. I, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1965.
4. M.S. Sodha, A.K. Aggarwal and P.K. Kaw, 'Image formation by an optically stratified medium: Optics of mirage and looming', British Journal of Applied Physics, vol. **18**, 503, 1967.
5. R.T. Bush and R.S. Robinson, 'A Note explaining the mirage', American Journal of Physics, vol. **42**, 774, 1974.
6. A.B. Fraser and W.H. Mach, 'Mirages', Scientific American, January, vol. **234**, 102, 1976.
7. E. Khular, K. Thyagarajan and A. K. Ghatak, 'A note on mirage formation', American Journal of Physics, vol. **45**, 90, 1977.
8. W.J. Humphreys, Physics of the Air, McGraw-Hill Book Co., New York, 1920.
9. S. K. Mitra, The Upper Atmosphere, Second Edition, The Asiatic Society, Calcutta, 1952.
10. W.A. Newcomb, 'Generalized Fermat's principles', American Journal of Physics, vol. **51**, 338, 1983.
11. E. Khular, K. Thyagarajan and A.K. Ghatak, 'Ray tracing in uniaxial and biaxial media', Optik, vol. **46**, 297, 1976.
12. V. Lakshminarayanan, A. Ghatak and K. Thyagarajan, Lagrangian Optics, Kluwer Academic Publishers, 2002.