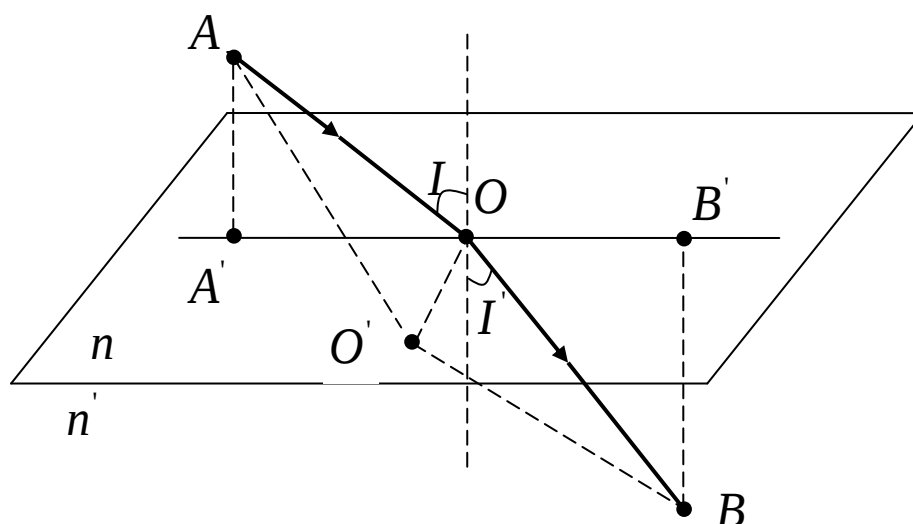


用费马定理证明光线的折射定理。

证明：（折射定理其实包含了两部分内容，一是入射、折射和法线三线共面；二是入射角 I 和折射角 I' 满足 $n \sin I = n' \sin I'$ ，最好是分别证明）

（1）如图所示：



假设 A 和 B 在介质界面上的投影垂足分别为 A' 和 B' ，若有任意一条入射光线在界面上的入射点为 O' （不在 $A'B'$ 连线上，否则失去任意性一般性），那么 $AO' \rightarrow O'B$ 为从 A 到 B 的一条可能光路；

过 O' 做 $A'B'$ 的垂线，交 $A'B'$ 于 O 点，那么 $AO \rightarrow OB$ 也是从 A 到 B 的一条可能光路；

在直角三角形 $AO'O$ 和 $BO'O$ 中，分别有 $AO'' > AO$ 和 $BO'' > BO$ ，所以有：

$$AO'' + BO' > AO + BO$$

即光路 $AO' \rightarrow O'B$ 的光程值大于光路 $AO \rightarrow OB$ 的光程值。

而 O' 为任意的（只要不在 $A'B'$ 连线上），所以任何一条 $AO' \rightarrow O'B$ 都会大于 $AO \rightarrow OB$ 的光程，即光路 $AO \rightarrow OB$ 的光程是最小的，按照费马定理可知，光线必然按照光路 $AO \rightarrow OB$ 行进。而光路 $AO \rightarrow OB$ 很显然就是在入射光线 AO 、法线 ON 和折射光线 OB 共同组成的面内。

以上证明了入射点必然是 $A'B'$ 连线上的 O 点，而 O 点的具体位置未定（即入射角未定）

(2) 设 O 点为 $A'B'$ 连线上的任一点, $OA' = x, A'B' = z, AA' = h_1, BB' = h_2$, 则按照光程的定义式可知:

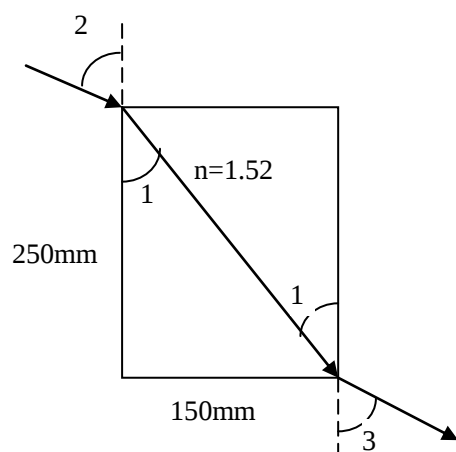
$$L_{AB} = n\sqrt{x^2 + h_1^2} + n'\sqrt{(z-x)^2 + h_2^2} \quad (\text{此式中只有 } x \text{ 是变量})$$

由费马定理可知, 光程应该为极值, 所以

$$\text{令 } L'_{AB} = 0 \Rightarrow n \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} - n' \frac{z-x}{\sqrt{(z-x)^2 + h_2^2}} = n \sin I - n' \sin I' = 0$$

即得证。

1-2 解:



(1) 由 $n \sin I = n' \sin I'$ 可知, 要获得 $\angle 3$ 的最大值, 即要获得 $\angle 1$ 的最大值, 又由图中几何关系可知, 如图所示位置的 $\angle 1$ 就是 $\angle 1$ 可能获得的最大值, 此时有

$$\tan \angle 1 = \frac{150}{250} = 0.6 \Rightarrow \angle 1 = 30.98^\circ$$

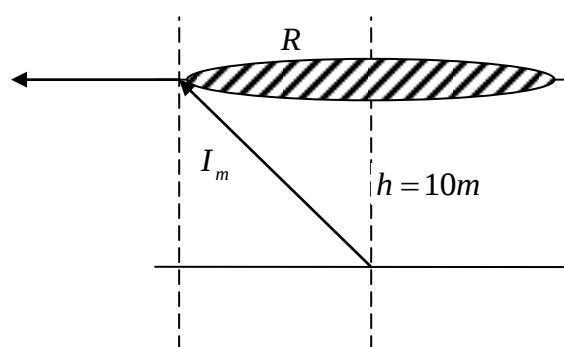
$$\text{又 } n \sin \angle 1 = 1 \times \sin \angle 3 \Rightarrow \angle 3 = 51.48^\circ$$

此角度为半边视角, 考虑全视角, 则人眼能看到外界的最多角度范围为

$$2\angle 3 = 2 \times 51.48^\circ = 102.96^\circ$$

(2) 若孔宽达到 220mm, 通过计算可知, 早已满足全反射定律, 则 $\angle 2$ 早已达到 90 度, 所以理论上此时可以看到全视角 180 度的范围。

1-3 解:



$$\sin I_m = \frac{n}{n'} = \frac{1}{1.33}$$

$$I_m = 48.75^\circ$$

$$\tan I_m = \frac{R}{h} \Rightarrow R = 11.4m$$

$$\therefore S = \pi R^2 = 408.38m^2$$

1-7 解:

因为题目所给透镜有厚度 d , 所以不能当成理想薄透镜套用其焦距或物像计算公式。应该当成共轴球面系统, 即前表面+转面过渡+后表面。

对于前表面, 有

$$\frac{n_1'}{l_1'} - \frac{n_1}{l_1} = \frac{n_1' - n_1}{r_1}$$

$$\Rightarrow l_1' = 36.4232 \text{ (mm)}$$

$$\text{由垂轴放大率 } \beta_1 = \frac{n_1 l_1'}{n_1' l_1} = \frac{y_1'}{y_1}$$

$$\Rightarrow y_1' = \beta_1 y_1 = \frac{n_1 l_1'}{n_1' l_1} y_1 = -2.402114 \text{ (mm)}$$

转面过渡, 有

$$n_2 = n_1' = 1.5163, l_2 = l_1' - d_1 = 31.423252 \text{ mm}, n_2' = 1, y_2 = y_1' = -2.402114 \text{ mm}, r_2 = -50 \text{ mm}$$

$$\therefore \frac{n_2'}{l_2'} - \frac{n_2}{l_2} = \frac{n_2' - n_2}{r_2} \Rightarrow l_2' = 17.0707 \text{ (mm)}$$

$$\Rightarrow y_2' = \beta_2 y_2 = \frac{n_2 l_2'}{n_2' l_2} y_2 = -1.978692 \text{ (mm)}$$

即 像的位置在透镜后表面 之后 17.0707mm 处, 像的大小为 1.978692mm, 为倒立像 (相对于最开始的物)。

附加题: 一硬币放置于高 15cm 的烧杯底部中央, 将一玻璃磨制的双凸透镜 (两球面曲率半径均为 10cm) 放置于烧杯上口, 设硬币在透镜中形成一直径为 3.6cm 的像。

求 (1) 像的位置和物的大小。

(2) 烧杯中充满水时, 像的大小和位置如何?

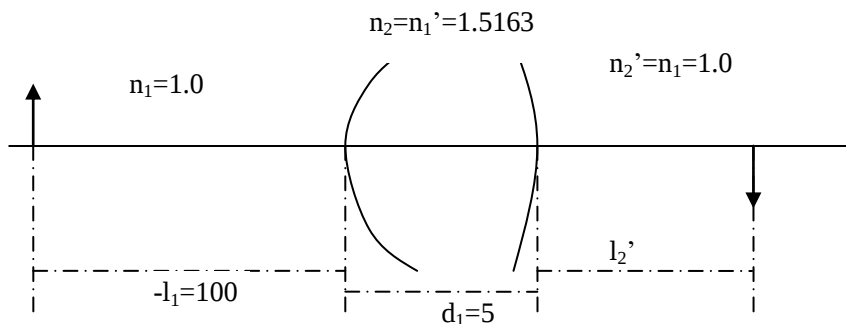
解:

(1) 由题意, 已知为薄透镜 ($d=0$), 透镜前后 $n=1$, 物距 $l = -15 \text{ cm}$, 像高

$y' = 3.6 \text{ cm}$, 凸透镜两球面曲率半径为 $r_1 = 10 \text{ cm}, r_2 = -10 \text{ cm}$, 由物像关系

式 (1-51) 可求出像的位置. 所以本题关键是求出 f' 。

$$\text{由式 (1-50) 可得, } f' = \frac{1}{(n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} = 10 \text{ (cm)}$$



所以, 由式 (1-51) 可得, $\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f'} \Rightarrow l' = 30(\text{cm})$

即, 像的位置在透镜上方 30cm 处。

物的大小可由垂轴放大倍率得到, 由 $\beta = \frac{l'}{l} = \frac{30}{-15} = -2 = \frac{y'}{y} \Rightarrow y = -1.8(\text{cm})$, 其

中符号仅表示相对像倒立, 不表示大小。

(2) 由题意可知, 此时透镜两边的介质不一样, 因此不能再简单套用公式

(1-50) 得到焦距, 也就不能用 (1-51) 求解。此题应该按照共轴球面系统的思路求解。

第 1 个面, 有 $n_1 = n_{\text{水}} = 1.33, n_1' = n_{\text{玻璃}} = 1.5, r_1 = 10, l_1 = -15$, 由物像关系式

$$(1-17), \text{ 有 } \frac{1.5}{l_1'} - \frac{1.33}{-15} = \frac{1.5 - 1.33}{10} \Rightarrow l_1' = -20.93(\text{cm})$$

转面过渡, 有

$$n_2 = n_1' = n_{\text{玻璃}} = 1.5, n_2' = n_{\text{空气}} = 1, r_2 = -10, l_2 = l_1' - d_1 = -20.93 - 0 = -20.93$$

$$\text{第 2 个面, 由物像关系式 (1-17) 有, } \frac{1}{l_2'} - \frac{1.5}{-20.93} = \frac{1 - 1.5}{-10} \Rightarrow l_2' = -46.15(\text{cm}),$$

即像的位置位于透镜下方 46.15cm 处。

共轴球面系统的总放大倍率为

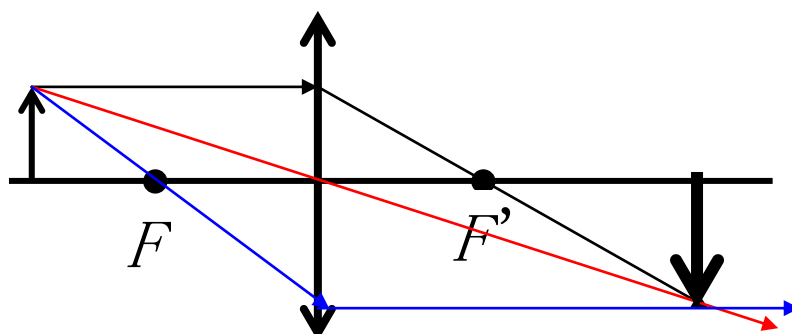
$$\beta = \beta_1 \beta_2 = \frac{n_1}{n_2'} \frac{l_1' l_2'}{l_1 l_2} = \frac{1.33}{1} \frac{-20.93 \times (-46.15)}{-15 \times (-20.93)} = 4.09 = \frac{y'}{y}$$

$$\therefore y' = 4.09 \times (-1.8) = -7.37(\text{cm})$$

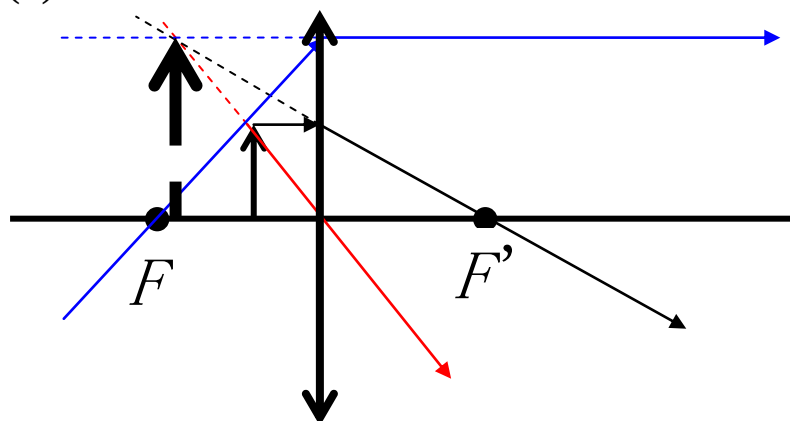
3. 利用 P20 的薄透镜的性质 (或上课 PPT 的图解法求物像关系之“三条特殊光线”), 在下列各图中分别画出各自的三条特殊光线的成像光路, 并标出像的位置与虚实。

解: 如下图所示, 黑色光线为“平行于光轴入射的光线经透镜后过像方焦点”的光线; 蓝色光线为“过物方焦点的入射光线经透镜后平行于光轴射出”; 红色光线为“通过透镜中心的光线方向不变”

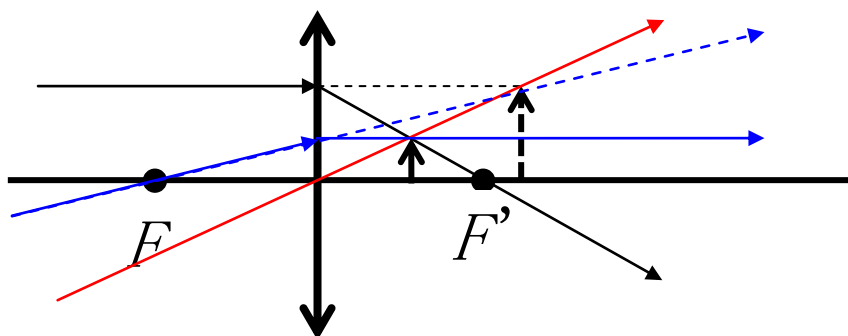
(1)



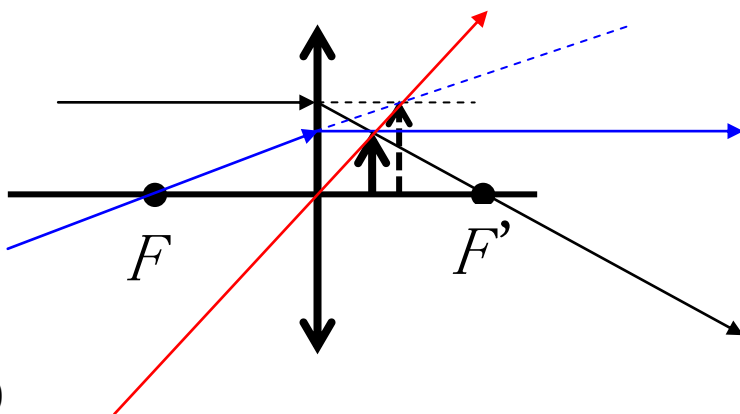
(2)



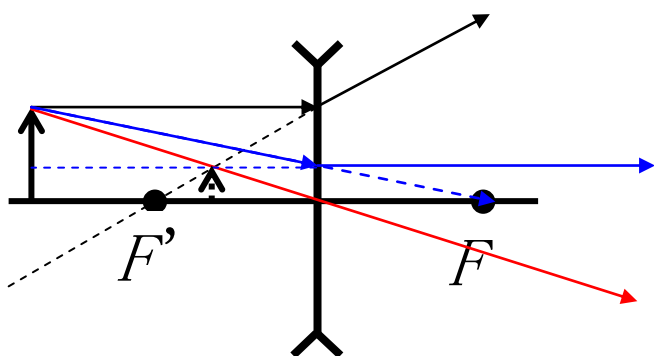
(3)



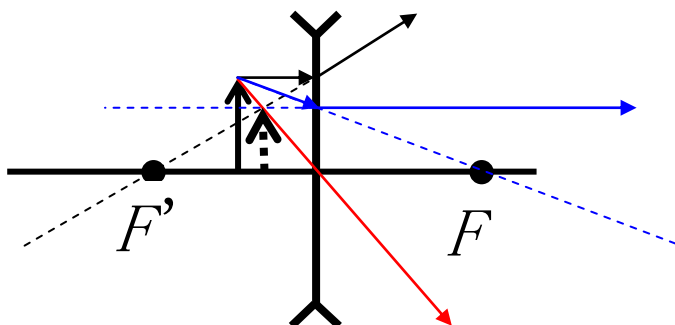
(4)



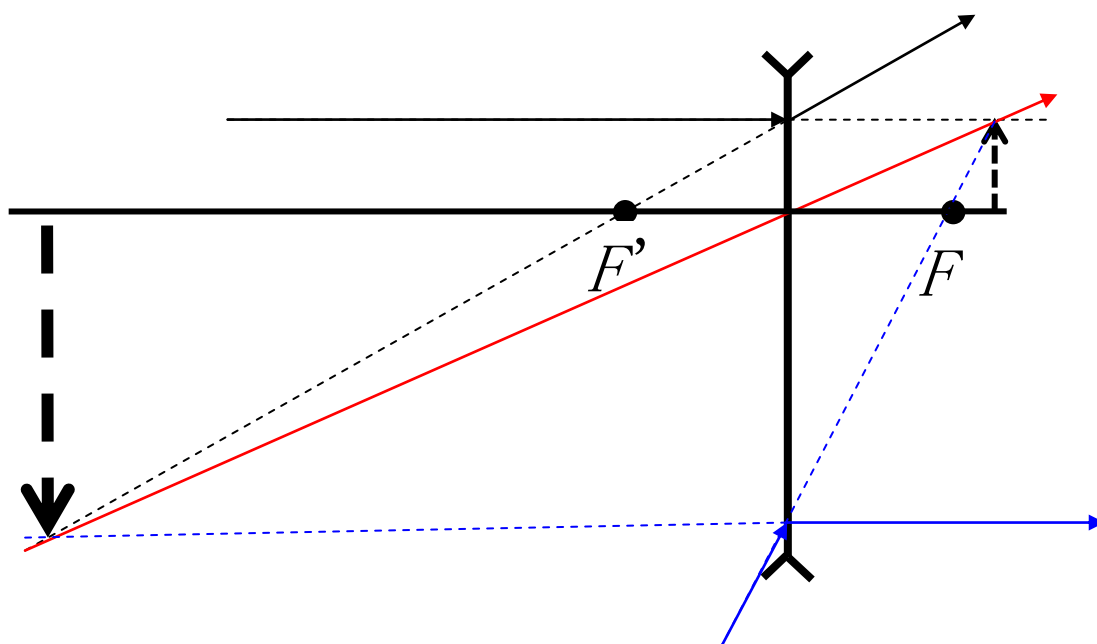
(5)



(6)



(7)



(8)

