

高等数学 (下) - 证明题 - 专题

一、第 9 章 多元函数微分学及其应用

1. 【抽象复合函数求导的证明】

1. 设 $z = xy + xF(u)$, 而 $u = \frac{y}{x}$, $F(u)$ 为可导函数, 证明 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy$ 。

$$\text{证明 } \frac{\partial z}{\partial x} = y + F(u) + xF'(u)\left(-\frac{y}{x^2}\right) = y + F(u) - \frac{y}{x}F'(u), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + xF'(u)\frac{1}{x} = x + F'(u)$$

$$\therefore x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x\left(y + F(u) - \frac{y}{x}F'(u)\right) + y(x + F'(u)) = 2xy + xF(u) = z + xy$$

2. 【抽象隐函数求导的证明】

2. 证明由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 满足关系式 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$, 其中 F 具有连续的一阶偏导数。

$$\text{证明 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{F'_1\left(-\frac{y}{x^2}\right) + F'_2\left(-\frac{z}{x^2}\right)}{F'_2 \cdot \frac{1}{x}} = \frac{yF'_1 + zF'_2}{xF'_2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{F'_1 \cdot \frac{1}{x}}{F'_2 \cdot \frac{1}{x}} = -\frac{F'_1}{F'_2}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = x \cdot \frac{yF'_1 + zF'_2}{xF'_2} + y \cdot \left(-\frac{F'_1}{F'_2}\right) - z = 0$$

3. 设函数 $z = f(x, y)$ 由方程 $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ 所确定, 证明 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$ 。

证: 设 $G(x, y, z) = F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right)$, 令 $u = x + \frac{z}{y}, v = y + \frac{z}{x}$

$$\text{则 } G_x = F'_u \cdot 1 + F'_v \cdot \left(-\frac{z}{x^2}\right) = F'_u - \frac{z}{x^2}F'_v; \quad G_y = F'_u \cdot \left(-\frac{z}{y^2}\right) + F'_v \cdot 1 = -\frac{z}{y^2}F'_u + F'_v;$$

$$G_z = F'_u \cdot \frac{1}{y} + F'_v \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{y}F'_u + \frac{1}{x}F'_v$$

$$\text{故 } x \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 G'_x}{x G'_z} = -\frac{x^2 y F'_u - z y F'_v}{x F'_u + y F'_v}; \quad y \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 G'_y}{y G'_z} = -\frac{-x z F'_u + x y^2 F'_v}{x F'_u + y F'_v}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x^2 y F'_u + z y F'_v + x z F'_u - x y^2 F'_v}{x F'_u + y F'_v} = \frac{z(x F'_u + y F'_v) - x y (x F'_u + y F'_v)}{x F'_u + y F'_v} = z - xy$$

4. 设 $\Phi(u, v)$ 具连续偏导数, 证明由方程 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$ 所确定的隐函数 $z = f(x, y)$ 满足 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$.

证: 在方程 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$ 两边关于 x 求偏导得:

$$\Phi'_u (c - a \frac{\partial z}{\partial x}) + \Phi'_v (-b \frac{\partial z}{\partial x}) = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c\Phi'_u}{a\Phi'_u + b\Phi'_v}$$

同样地, 方程两边关于 y 求偏导得:

$$\Phi'_u (-a \frac{\partial z}{\partial y}) + \Phi'_v (c - b \frac{\partial z}{\partial y}) = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c\Phi'_v}{a\Phi'_u + b\Phi'_v}$$

$$\therefore a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ac\Phi'_u}{a\Phi'_u + b\Phi'_v} + \frac{bc\Phi'_v}{a\Phi'_u + b\Phi'_v} = \frac{c(a\Phi'_u + b\Phi'_v)}{a\Phi'_u + b\Phi'_v} = c, \text{ 得证.}$$

二、第 10 章 重积分

1. 【二重积分的性质】-积分中值定理

5. 设 D 由中心在原点, 半径为 r 的圆所围成, 证明 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D e^{x^2-y^2} \cos(x+y) dx dy = 1$.

证: $\because e^{x^2-y^2} \cos(x+y)$ 在 D 上连续, $\therefore$ 由二重积分的中值定理知, 在 D 内至少存在一点 (ξ, η) , 使得

$$\iint_D e^{x^2-y^2} \cos(x+y) dx dy = e^{\xi^2-\eta^2} \cos(\xi+\eta) \cdot \pi r^2, \text{ 于是有}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D e^{x^2-y^2} \cos(x+y) dx dy = \lim_{r \rightarrow 0} e^{\xi^2-\eta^2} \cos(\xi+\eta) = \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} e^{\xi^2-\eta^2} \cos(\xi+\eta) = 1$$

2. 【二重积分有关等式证明】角度 1-改变积分次序

6. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 并设 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 求 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy = \frac{A^2}{2}$.

证: 因为 $\int_x^1 f(y) dy$ 不能直接积出, 所以应该改变积分次序, 令 $I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy$ 则

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_0^y f(x)f(y) dx = \int_0^1 f(x) dx \int_0^x f(y) dy,$$

$$\text{故 } 2I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy + \int_0^1 f(x) dx \int_0^x f(y) dy = \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 f(y) dy = A^2, \text{ 所以 } I = \frac{A^2}{2}$$

7. 证明: $\int_a^b dx \int_a^x (x-y)^{n-2} f(y) dy = \frac{1}{n-1} \int_a^b (b-y)^{n-1} f(y) dy$.

证明 交换左边二次积分的次序

$$\int_a^b dx \int_a^x (x-y)^{n-2} f(y) dy = \int_a^b dy \int_y^b (x-y)^{n-2} f(y) dx = \int_a^b f(y) \frac{1}{n-1} (x-y)^{n-1} \Big|_y^b dy$$

$$= \frac{1}{n-1} \int_a^b (b-y)^{n-1} f(y) dy.$$

3. 【二重积分有关等式证明】角度 2-对称性

8. 证明 $\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)} dx dy = \frac{a+b}{2} \pi R^2$, 其中 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $f(x)$ 在 D 上恒正, 且连续.

证明 因为 D 关于直线 $y=x$ 对称, $\iint_D f(x,y) d\sigma = \iint_D f(y,x) d\sigma$, 于是

$$\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)} dx dy = \iint_D \frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)} dx dy,$$

$$\text{所以} \quad \iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)} dx dy = \frac{1}{2} \left\{ \iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)} dx dy + \iint_D \frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)} dx dy \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D (a+b) d\sigma = \frac{a+b}{2} \times D \text{ 的面积} = \frac{a+b}{2} \pi R^2.$$

4. 【二重积分不等式证明】-均值不等式、对称性、二重积分几何意义综合

9. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 证明 $\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$

证明: 左边 $= \int_a^b f(x) dx \int_a^b f(y) dy = \iint_D f(x)f(y) d\sigma$, 其中 $D: a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$

由于 $[f(x)-f(y)]^2 \geq 0$, $f(x)f(y) \leq \frac{1}{2}[f^2(x)+f^2(y)]$ 所以

$$\iint_D f(x)f(y) d\sigma \leq \iint_D \frac{1}{2}[f^2(x)+f^2(y)] d\sigma = \iint_D f^2(x) d\sigma = \int_a^b dy \int_a^b f^2(x) dx = (b-a) \int_a^b f^2(x) dx,$$

10. 设 $f(x) \in C[a,b]$, $f(x) > 0$, 证明 $\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2$

证明: 化成二重积分证明, 记 $D=[a,b;a,b]$, 由不等式 $A^2+B^2 \geq 2AB$, 有

$$\text{左边} = \frac{1}{2} \left[\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dy}{f(y)} + \int_a^b f(y) dy \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \right] = \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \right] dx dy$$

$$= \iint_D \frac{f^2(x)+f^2(y)}{2f(x)f(y)} dx dy \geq \iint_D \frac{2f(x)f(y)}{2f(x)f(y)} dx dy = D \text{ 的面积} = (b-a)^2$$

三、第 11 章 曲线、曲面积分

1. 【积分与路径无关的不等式证明】-均值不等式

11. 设 L 是正方形 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 的正向边界, $f(x)$ 是正值连续函数,

试证明
$$\oint_L -\frac{y}{f(x)} dx + xf(y) dy \geq 2.$$

证明 由格林公式
$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

$$P = -\frac{y}{f(x)}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{f(x)}; \quad Q = xf(y), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = f(y),$$

$$\oint_L -\frac{y}{f(x)} dx + xf(y) dy = \iint_D [f(y) + f^{-1}(x)] dx dy \geq 2 \iint_D dx dy = 2. \quad (\text{因为 } f(x) \text{ 是正值连续函数})$$

2. 【积分与路径无关的不等式证明】-与路径无关的条件

12. 在上半平面内 $f(x, y)$ 具有连续的偏导数, 且对任意的 $t > 0$ 都有 $f(tx, ty) = t^{-2} f(x, y)$, 证明: 在 D

内任意分段光滑的闭曲线都有
$$\oint_L yf(x, y) dx - xf(x, y) dy = 0.$$

证明 $P = yf(x, y), Q = -xf(x, y),$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -f(x, y) - xf'_x(x, y), \quad \frac{\partial P}{\partial y} = f(x, y) + yf'_y(x, y),$$

已知 $f(tx, ty) = t^{-2} f(x, y)$, 两边对 t 求导, $xf'_1(tx, ty) + yf'_2(tx, ty) = -2t^{-3} f(x, y)$

令 $t=1$, 则有 $xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = -2f(x, y)$, 所以 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 曲线积分与路径无关,

$$\text{故 } \oint_L yf(x, y) dx - xf(x, y) dy = 0$$

四、第 12 章 无穷级数

13. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

证: 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, 所以数列 $\{b_n\}$ 有界, 即存在 $M > 0$,

使得对任意的 n , 有 $|b_n| \leq M$, 是 $|a_n b_n| \leq M |a_n|$,

又级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 由比较判敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

14. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 试证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ 绝对收敛.

证: $\because \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

当 n 充分大时 $|a_n| < 1$, 此时 $a_n^2 \leq |a_n|$, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 绝对收敛.

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{a_n}{1+a_n} \right|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|1+a_n|} = 1$, 由比值判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ 绝对收敛.

$\therefore \frac{a_n^2}{1+a_n^2} \leq a_n^2$, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ 收敛, 即绝对收敛.

15. 设 $u_n > 0, v_n > 0 (n=1, 2, \dots)$, 且 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, 证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

证: $\therefore \frac{u_2}{u_1} \leq \frac{v_2}{v_1}, \frac{u_3}{u_2} \leq \frac{v_3}{v_2}, \frac{u_4}{u_3} \leq \frac{v_4}{v_3}, \dots, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}, \therefore \frac{u_{n+1}}{u_1} \leq \frac{v_{n+1}}{v_1}$, 即 $u_{n+1} \leq \frac{u_1}{v_1} v_{n+1}$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

16. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(u_{n+1} - u_n)$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

证: 因 $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(u_{n+1} - u_n)$ 收敛, 设其 n 项部分和数列为 $\{\delta_n\}$, 则可设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = A$

$$\therefore \delta_n = 2(u_2 - u_1) + 3(u_3 - u_2) + \dots + (n+1)(u_{n+1} - u_n) = -u_1 - s_n + (n+1)u_{n+1}$$

其中 s_n 是 $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ 的第 n 项部分和, 则 $s_n = -u_1 - \delta_n + (n+1)u_{n+1}$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -u_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)u_{n+1}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和为 $-u_1 - A$.

证毕

★★★★17. 设 $|a_n| \leq 1 (n=1, 2, 3, \dots)$, $|a_n - a_{n-1}| \leq \frac{1}{4} |a_{n-1}^2 - a_{n-2}^2| (n=3, 4, 5, \dots)$, 证明:

(1) 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛; (2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明: (1) $\therefore |a_n - a_{n-1}| \leq \frac{1}{4} |a_{n-1}^2 - a_{n-2}^2| = \frac{1}{4} |a_{n-1} - a_{n-2}| |a_{n-1} + a_{n-2}| \leq \frac{1}{2} |a_{n-1} - a_{n-2}|$

$$\leq \frac{1}{2^2} |a_{n-2} - a_{n-3}| \leq \dots \leq \frac{1}{2^{n-2}} |a_2 - a_1| \leq \frac{1}{2^{n-3}}$$

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛.

$$(2) \text{ 设 } \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) = s$$

$$\because a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = \sum_{k=2}^n (a_k - a_{k-1}) + a_1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s + a_1, \quad \text{即数列 } \{a_n\} \text{ 收敛.}$$

★★★18. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数. 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

试证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

证明: 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 知 $f(0) = 0$, 且 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{nf\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^{3/2}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2} f''(0)$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

★★★19. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

证明: 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 知 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x = 0$, 且 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

所以 $f(x)$ 带皮亚若项的麦克劳林公式为 $f(x) = \frac{f''(0)}{2} x^2 + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0)$

$$\text{当 } f''(0) \neq 0 \text{ 时, } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f''(0)}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{f''(0)}{2} \frac{1}{n^2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

即 $\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \sim \frac{|f''(0)|}{2} \frac{1}{n^2}$, 由 $\sum_1^{\infty} \frac{|f''(0)|}{2} \frac{1}{n^2}$ 收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

$$\text{当 } f''(0) = 0 \text{ 时, } f\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|}{\frac{1}{n^2}} = 0, \text{ 由 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛知 } \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ 绝对收敛.}$$

综合上述: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

20. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{2n \sin \frac{1}{n}} \cdot a_n) = 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证明: $\because \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{2n \sin \frac{1}{n}} \cdot a_n) = 1$

$\therefore$ 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, 恒有 $\left| n^{2n \sin \frac{1}{n}} \cdot a_n - 1 \right| < \frac{1}{2}$,

$$\text{即 } \frac{1}{2} < n^{2n \sin \frac{1}{n}} \cdot a_n < \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2} n^{-2n \sin \frac{1}{n}} < a_n < \frac{3}{2} n^{-2n \sin \frac{1}{n}}$$

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin \frac{1}{n} = 2$$

$\therefore$ 对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, 恒有 $\left| 2n \sin \frac{1}{n} - 2 \right| < \frac{1}{2}$, 即 $\frac{3}{2} < 2n \sin \frac{1}{n} < \frac{5}{2}$

$$\text{从而 } a_n < \frac{3}{2} n^{-2n \sin \frac{1}{n}} < \frac{3}{2} n^{-\frac{3}{2}}$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

★★★21. 设数列 $S_1 = 1, S_2, S_3, \dots$, 由公式 $2S_{n+1} = S_n + \sqrt{S_n^2 + u_n}$ 决定, 其中 u_n 是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n > 0)$ 的

一般项, 证明: 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是数列 $\{S_n\}$ 也收敛.

证明: 由 $2S_{n+1} = S_n + \sqrt{S_n^2 + u_n}$, $S_1 = 1, u_n > 0$. 易由归纳法证 $S_n > 1$;

又由 $2S_{n+1} - S_n = \sqrt{S_n^2 + u_n}$ 两边同时平方整理得

$$S_{n+1}(S_{n+1} - S_n) = \frac{u_n}{4}, \text{ 故 } S_{n+1} > S_n > 1$$

$$S_{n+1}^2 - S_n^2 = (S_{n+1} + S_n)(S_{n+1} - S_n) > S_{n+1}(S_{n+1} - S_n) > \frac{u_n}{4}$$

$$\text{从而 } 0 < S_{n+1} - S_n < \frac{u_n}{4} < S_{n+1}^2 - S_n^2 \quad *$$

必要性: 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 收敛知 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{4}$ 收敛. 由*及比较判别法知,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (S_{n+1} - S_n)$ 收敛. 其 n 项部分和数列 $\{\delta_n\}$ 极限存在, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = A$

$$\because \delta_n = (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \dots + (S_{n+1} - S_n) = S_{n+1} - S_1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+1} - S_1) = A$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A + S_1 \quad \text{即数列 } \{S_n\} \text{ 收敛.}$$

充分性: 数列 $\{S_n\}$ 收敛, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = B$, 设 $\sum_{n=1}^{\infty} (S_{n+1}^2 - S_n^2)$ 的第 n 项部分和 V_n , 则

$$V_n = S_{n+1}^2 - S_1^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = B^2 - 1$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} (S_{n+1}^2 - S_n^2)$ 收敛, 由*及比较判别法知 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{4}$ 收敛

从而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 收敛. 证毕