

高等数学 (下) - 证明题 - 专题

一、第 9 章 多元函数微分学及其应用

1. 【抽象复合函数求导的证明】

1. 设 $z = xy + xF(u)$, 而 $u = \frac{y}{x}$, $F(u)$ 为可导函数, 证明 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy$ 。

2. 【抽象隐函数求导的证明】

2. 证明由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 满足关系式 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$, 其中 F 具有连续的一阶偏导数。

3. 设函数 $z = f(x, y)$ 由方程 $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ 所确定, 证明 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$ 。

4. 设 $\Phi(u, v)$ 具连续偏导数, 证明由方程 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$ 所确定的隐函数 $z = f(x, y)$ 满足 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$ 。

二、第 10 章 重积分

1. 【二重积分的性质】-积分中值定理

5. 设 D 由中心在原点, 半径为 r 的圆所围成, 证明 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D e^{x^2-y^2} \cos(x+y) dx dy = 1$.

2. 【二重积分有关等式证明】角度 1-改变积分次序

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 并设 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 求 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy = \frac{A^2}{2}$.

7. 证明: $\int_a^b dx \int_a^x (x-y)^{n-2} f(y) dy = \frac{1}{n-1} \int_a^b (b-y)^{n-1} f(y) dy$.

3. 【二重积分有关等式证明】角度 2-对称性

8. 证明 $\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)} dx dy = \frac{a+b}{2} \pi R^2$, 其中 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $f(x)$ 在 D 上恒正, 且连续.

4. 【二重积分不等式证明】-均值不等式、对称性、二重积分几何意义综合

9. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 证明 $\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$

10. 设 $f(x) \in C[a, b]$, $f(x) > 0$, 证明 $\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2$

三、第 11 章 曲线、曲面积分

1. 【积分与路径无关的不等式证明】-均值不等式

11. 设 L 是正方形 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 的正向边界, $f(x)$ 是正值连续函数,

试证明 $\oint_L -\frac{y}{f(x)} dx + xf(y) dy \geq 2$.

2. 【积分与路径无关的不等式证明】-与路径无关的条件

12. 在上半平面内 $f(x, y)$ 具有连续的偏导数, 且对任意的 $t > 0$ 都有 $f(tx, ty) = t^{-2} f(x, y)$,

证明: 在 D 内任意分段光滑的闭曲线都有 $\oint_L yf(x, y) dx - xf(x, y) dy = 0$.

四、第 12 章 无穷级数

13. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

14. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 试证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ 绝对收敛.

15. 设 $u_n > 0, v_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 且 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, 证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

16. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(u_{n+1} - u_n)$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

17. 设 $|a_n| \leq 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$, $|a_n - a_{n-1}| \leq \frac{1}{4} |a_{n-1}^2 - a_{n-2}^2| (n = 3, 4, 5, \dots)$,

证明: (1) 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛; (2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

18. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数。且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

试证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

19. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ ，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

20. 证明： $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{2n \sin \frac{1}{n}} \cdot a_n) = 1$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。