

第7章 微分方程—求积分方程综合

1. 求连续函数 $f(x)$ 使它满足 $\int_0^1 f(tx)dt = f(x) + x \sin x$ 。

思路：利用变上下限积分的求导公式逐次消去积分符号，并逐步根据积分相应的值定出微分方程的初始条件。

解：令 $u = tx$ ，则 $du = xdt$ ，且有 $t = 0, u = 0$ ， $t = 1, u = x$ ，

$$\text{原方程化简为 } \int_0^x f(u) \cdot \frac{1}{x} du = f(x) + x \sin x,$$

$$\text{即 } \int_0^x f(u) du = xf(x) + x^2 \sin x,$$

$$\text{两边关于 } x \text{ 求导得 } f(x) = f(x) + xf'(x) + 2x \sin x + x^2 \cos x,$$

$$\text{化简得 } f'(x) = -2 \sin x - x \cos x,$$

$$\text{两边积分得 } f(x) = \int (-2 \sin x - x \cos x) dx = \cos x - x \sin x + C \quad \text{即为所求函数。}$$

2. 设连续函数 $y(x)$ 满足方程 $y(x) = \int_0^x y(t)dt + e^x$ ，求 $y(x)$ 。

解：方程两边关于 x 求导，得 $y'(x) = y(x) + e^x$ ，为一阶线性非齐次微分方程。

利用公式得通解为

$$y = e^{\int dx} \left(\int e^x e^{-\int dx} dx + C \right) = e^x \left(\int dx + C \right) = e^x (x + C).$$

$$\text{由 } y|_{x=0} = 1, \text{ 得 } C = 1,$$

$$\text{故所求曲线的方程为 } y = e^x (x + 1).$$

3. 设函数 $\varphi(x)$ 连续，且满足 $\varphi(x) = e^x + \int_0^x t\varphi(t)dt - x \int_0^x \varphi(t)dt$ ，求 $\varphi(x)$ 。

解：等式两边对 x 求导得 $\varphi'(x) = e^x - \int_0^x \varphi(t)dt$ ，

$$\text{再求导得微分方程 } \varphi''(x) = e^x - \varphi(x), \quad \text{即 } \varphi''(x) + \varphi(x) = e^x,$$

$$\text{微分方程的特征方程为 } r^2 + 1 = 0,$$

$$\text{其根为 } r_{1,2} = \pm i, \text{ 故对应的齐次方程的通解为 } \Phi(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

$$\text{易知 } \Phi^*(x) = \frac{1}{2} e^x \text{ 是非齐次方程的一个特解,}$$

$$\text{故非齐次方程的通解为 } \varphi(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x.$$

$$\text{由所给等式知 } \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 1, \quad \text{由此得 } C_1 = C_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{因此 } \varphi = \frac{1}{2} (\cos x + \sin x + e^x).$$

4. 设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, 求 $f(x)$ 。

解: $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt = \sin x - x \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt$, (1)

两边对 x 求导得:

$$f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t)dt - xf(x) + xf(x) = \cos x - \int_0^x f(t)dt \quad (2)$$

继续求导: $f''(x) + f(x) = -\sin x$

另取 $x=0$, 由 (1) (2) 得 $f(0)=0$, $f'(0)=1$,

于是问题转化为求微分方程 $f''(x) + f(x) = -\sin x$ 满足初始条件 $f(0)=0$, $f'(0)=1$ 的特解。

方程 $f''(x) + f(x) = -\sin x$ 对应的齐次方程的特征根为 $\lambda_{1,2} = \pm i$,

故对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$,

因为 $\lambda_{1,2} = \pm i$ 是特征根, 因此原方程的特解可设为 $Y^* = x(A \cos x + B \sin x)$,

代入方程得 $A = \frac{1}{2}, B = 0$,

所以方程的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}x \cos x$ 。

代入初始条件 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, 得 $C_1=0$, $C_2=\frac{1}{2}$,

从而 $f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}x \cos x$ 。

5. 已知某曲线在第一象限内且过坐标原点, 其上任一点 M 的切线 MT , M 的纵坐标 MP , x 轴所成的三角形 MPT 的面积与曲边三角形 OMP 的面积之比恒为常数 ($k > \frac{1}{2}$), 又知道点 M 处的导数总为正, 试求该曲线的方程。

解: 设所求曲线方程为 $y = y(x)$, 如右图所示

任一点 M 坐标为 (x, y) ,

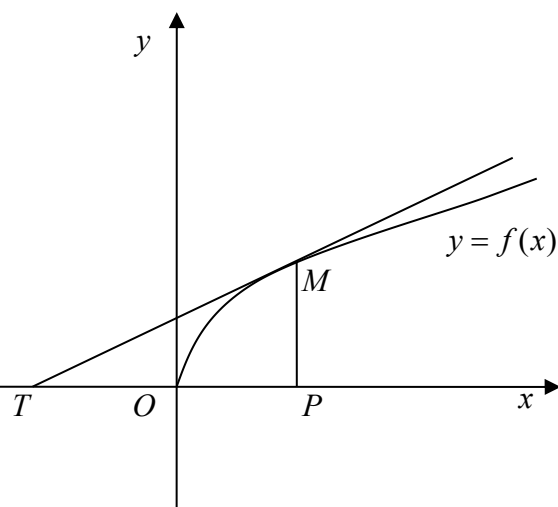
由题意得 $\tan \theta = y' = \frac{MP}{TP}$,

即 $TP = \frac{y}{y'}$, 三角形 MPT 的面积

$$S = \frac{1}{2} MP \times TP = \frac{1}{2} \times y \times \frac{y}{y'} = \frac{y^2}{2y'}$$

曲边三角形 OMP 的面积 $S = \int_0^x y(x)dx$,

由两面积之比为常数得 $\frac{y^2}{2y'} = k \int_0^x y(x)dx$,



两边关于 x 求导得 $\frac{2yy'y' - y^2y''}{y'^2} = 2ky(x)$, 即 $yy'' = 2(1-k)y'^2$,

令 $p(y) = y'$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$,

原方程化为 $yp \frac{dp}{dy} = 2(1-k)p^2$, 即 $p[y \frac{dp}{dy} - 2(1-k)p] = 0$.

由 $p = 0$ 得 $y = C$, 这是原方程的一个解. 但不合题意舍去。

由 $y \frac{dp}{dy} - 2(1-k)p = 0$, 得 $p = C_1 y^{2(1-k)}$, 即 $y' = C_1 y^{2(1-k)}$,

从而 $C_1 x + C_2 = \frac{y^{2k-1}}{2k-1}$,

由曲线过原点, 得 $y|_{x=0} = 0$, 代入得 $C_2 = 0$.

所求曲线为 $y^{2k-1} = (2k-1)C_1 x$,

由 C_1 的任意性, 曲线可表示为 $y = Cx^{\frac{1}{2k-1}}$, C 为任意常数。