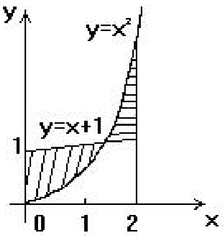
第 6 章 定积分的应用 —综合问题求最值

1.如图，$y=x^2$ 是区间 $\left[0,2\right]$ 上抛物线，直线 $y=ax+1$ 与曲线 $y=x^2$ 相交，问 a 为何值时，能使图中阴影部分面积相等.



解：设直线 $y=ax+1$

$$s=\int_0^2(ax+1)dx=\left(\frac{a}{2}x^2+x\right)\Big|_0^2$$

$$=2a+2$$

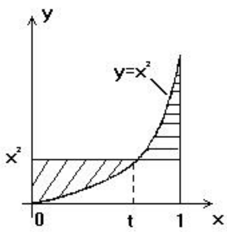
$$s=\int_0^2 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2=\frac{8}{3}$$

$$2a+2=\frac{8}{3}$$

$$a=\frac{1}{3}$$

2.如图，$y=x^2$ 是 $\left[0,1\right]$ 上的抛物线 $t\in\left(0,1\right)$，问 t 为何值时，使图中阴影面积相等.

解：$s=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$，　$s=t^2$，$\therefore t^2=\frac{1}{3}$，$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$



3.设曲线 $y=a\left(4-x^2\right)\left(a>0\right)$，过此曲线和 x 轴交点 $\left(-2,0\right)$ 及 $\left(2,0\right)$ 作曲线的两条法线，求曲线与这两条法线所围成的平面图形的面积最小值时 a 的值.

解：$y'=-2ax$，　$y'(2)=-4a$，法线：$y=\frac{1}{4a}(x-2)$.

$y=a(4-x^2)$ 是偶函数.

$$\therefore S=2\int_0^2\left[a(4-x^2)-\frac{1}{4a}(x-2)\right]dx$$

$$=2\int_0^2(-ax^2-\frac{x}{4a}+4a+\frac{1}{2a})dx$$

$$=2(-a\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{8a}+4ax+\frac{x}{2a})\Big|_0^2$$

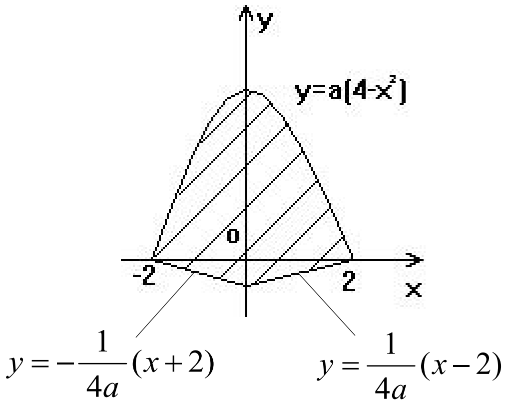
$$=\frac{32}{3}a+\frac{1}{a}.$$

$$S'(a)=\frac{32}{3}-\frac{1}{a^2}$$

$$S'(a)=0,\quad a^2=\frac{3}{32},\quad \because a>0\quad \therefore a=\frac{\sqrt{6}}{8}.$$

$$S''(a)=\frac{2}{a^3}>0,\quad S\text{为最小}.$$

$$\therefore \text{当}a=\frac{\sqrt{6}}{8}\text{时},S\text{为最小}.$$



4.求抛物线 $y=-x^2+1$ 在 $[0,1]$ 内的一切切线使它与两座标轴和抛物线 $y=-x^2+1$ 所围成的平面图形的面积最小.

解: $y'=-2x$, 切点 $M(x,-x^2+1)$.

切线方程 $Y-(-x^2+1)=-2x(X-x)$

$$A(\frac{x^2+1}{2x},0)\quad ,B(0,x^2+1).$$

$$S(x)_{\Delta BOA}=\frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^2}{2x}=\frac{1}{4}(x^3+2x+\frac{1}{x}).$$

$$S'(x)=\frac{1}{4}(3x^2+2-\frac{1}{x^2})=\frac{1}{4x^2}(x^2+1)(3x^2-1).$$

$$S'(x)=0,x=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

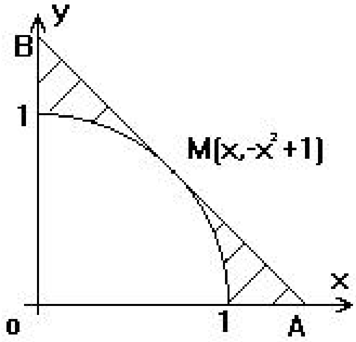
$$x<\frac{\sqrt{3}}{3},S'(x)<0;x>\frac{\sqrt{3}}{3},S'(x)>0,\quad \therefore S_{\min}=S(\frac{\sqrt{3}}{3}).$$

$$\therefore \text{切线}y=-\frac{2}{3}\sqrt{3}x+\frac{4}{3}.$$

另解:

$$S_{阴影}=S_{\Delta BOA}-\int_0^1(-x^2+1)dx$$
$$=\frac{1}{4}(x^3+2x+\frac{1}{x})+\frac{1}{3}-1$$
$$S'(x)=\frac{1}{4x^2}(x^2+1)(3x^2-1)$$
$$S'(x)=0$$

同理(与上述相同).

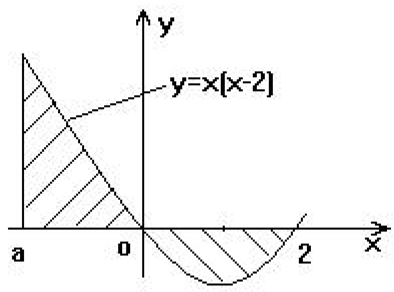


5.求 $a(a<0)$，使曲线 $y=x(x-2)$ 与 x 轴围成的平面图形的面积等于曲线 $y=x(x-2)$，$x=a$ 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

解:$S=\int_0^2|x(x-2)|dx$

$$=-\int_0^2(x^2-2x)dx=-(\frac{1}{3}x^3-x^2)\Big|_0^2$$
$$=\frac{4}{3}$$
$$S=\int_a^0 x(x-2)dx$$
$$=(\frac{x^3}{3}-x^2)\Big|_a^0=a^2-\frac{a^3}{3}$$
$$\therefore a^2-\frac{a^3}{3}=\frac{4}{3},a^3-3a^2+4=0,\qquad a^3+a^2+4(1-a^2)=0$$
$$(1+a)(a^2-4a+4)=0\qquad a_1=-1,\quad a_2=2(舍去)$$

$\therefore a=-1$时,使两面积相等.



6.求通过 $(0,0),(1,-1)$ 且对称轴平行于 y 轴，开口向上的抛物线，使它与 x 轴所围成的平面图形的面积最小.

解:$y=ax^2+bx(a>0)$,

$$y=x(ax+b),\quad x=0,x=-\frac{b}{a}.$$

过$(1,-1)$, $\quad a+b=-1, \quad \therefore y=ax^2-(a+1)x$

$$\therefore S=-\int_0^{-\frac{b}{a}}(ax^2+bx)dx$$

$$=-\int_0^{\frac{a+1}{a}}\left[ax^2-(a+1)x\right]dx=\frac{1}{6}\frac{(a+1)^3}{a^2}$$

$$S'(a)=\frac{1}{6}(a+3+\frac{3}{a}+\frac{1}{a^2})'=\frac{1}{6}(1-\frac{3}{a^2}-\frac{2}{a^3}),$$

$S'(a)=0, \quad a^3-3a-2=0 \quad (a+1)^2(a-2)=0,$

$a_1=-1$(舍去) $\qquad a_2=2.$

$S'(a)<a, \quad a<2,$

$S'(a)>0, a>2, \qquad \therefore S(2)$为最小值.

$a=2, b=-3$

$\therefore$ 抛物线 $\quad y=2x^2-3x.$

7.求通过（0，0），（1，2）的抛物线，要求它具有以下性质：

（1）它的对称轴平行于 y 轴，且向下弯；（2）它与 x 轴所围图形面积最小

解：由于抛物线的对称轴平行于 y 轴，又过（0，0），所以可设抛物线方程为$y=ax^2+bx$，（由于下弯，所以$a<0$），将（1，2）代入$y=ax^2+bx$，得到$a+b=2$，因此$y=ax^2+(2-a)x$

该抛物线和 X 轴的交点为$x=0$和$x=\dfrac{a-2}{a}$，

$\therefore$所围区域D：$\begin{cases} 0<x<\dfrac{a-2}{a} \\ 0<y<ax^2+(2-a)x \end{cases}$

$$\therefore S_D=\int_0^{\frac{a-2}{a}}[ax^2+(2-a)x]dx=\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{2-a}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{\frac{a-2}{a}}=\frac{(a-2)^3}{6a^2}$$

$$S_D{}'(a)=\frac{1}{6}[a^{-2}\times 3(a-2)^2+(a-2)^3\times(-2a^{-3})]=\frac{1}{6}a^{-3}(a-2)^2(a+4)$$

得到唯一极值点：$a=-4$，

$\therefore$所求抛物线为： $\quad y=-4x^2+6x$

8.设直线$y=ax+b\left(y>0\right)$,与直线$x=0$,$x=\dfrac{1}{2}$及$y=0$所围成的梯形的面积等于A,试求，试求a,b使这个梯形绕x轴旋转所得立体的体积最小.

$$解:S=\int_0^{1/2}(ax+b)dx=\left(\frac{1}{2}ax^2+bx\right)\Bigg|_0^{1/2}=\frac{1}{8}a+\frac{b}{2}=A$$

$a+4b=8A, \quad a=4(2A-b).$

$$V=\pi\int_0^{1/2}(ax+b)^2dx=\pi\int_0^{1/2}(ax^2+2abx+b^2)dx$$

$$=\pi\left(\frac{a^2}{3}x^3+abx^2+b^2x\right)\Big|_0^{1/2}=\pi\left(\frac{a^2}{24}+\frac{ab}{4}+\frac{b^2}{2}\right)$$

$$=\pi\left[\frac{2}{3}(2A-b)^2+(2A-b)b+\frac{b^2}{2}\right]$$

$$=\frac{\pi}{6}(16A^2+4Ab+b^2)$$

$V'(b)=0, -4A+2b=0,\quad b=2A$(唯一)

$\therefore a=0.$

$\therefore$ 当$a=0, b=2A$时，这旋转体体积最小.

9. 周长为8的等腰三角形,绕其底边旋转而成旋转体.问腰和底边各为多少时，可使得这个旋转体的体积最大.

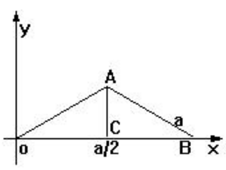
解：设$OB=a,\quad OA=AB=\dfrac{8-a}{2}$,

$AC=\sqrt{(4-\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{16-4a}=2\sqrt{4-a}$,

OA方程：$y=\dfrac{4\sqrt{4-a}}{a}x.$

$$\therefore V=2\pi\int_0^{\frac{a}{2}}y^2dx=\frac{32\pi}{a^2}(4-a)\int_0^{\frac{a}{2}}x^2dx$$

$$=\frac{4}{3}\pi a(4-a)$$



$V'=0, 4-2a=0,\qquad a=2\quad$ (唯一)

$\therefore$ 等腰三角形底边长为2, 腰长为3时, 体积最大.