第 5 章 定积分的恒等式和不等式证明

一、定积分的恒等式证明

1. 证明 $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\int_0^1(1-x)^m x^n dx$，并计算$\int_0^1 x^2(1-x)^7 dx$.

证　令 $x=1-t$，即 $t=1-x$，于是

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=-\int_1^0(1-t)^m t^n dt=\int_0^1(1-t)^m t^n dt$$

所以　$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\int_0^1(1-x)^m x^n dx$.

$$\int_0^1 x^2(1-x)^7 dx=\int_0^1 x^7(1-x)^2 dx=\int_0^1(x^7-2x^8+x^9)dx$$

$$=(\frac{1}{8}x^8-\frac{2}{9}x^9+\frac{1}{10}x^{10})\Big|_0^1=\frac{1}{360}.$$

2. 设 $f(x)$ 是以 l 为周期的连续函数，证明：对任意实数 a，有 $\int_a^{a+l}f(x)dx=\int_0^l f(x)dx$.

证　因为 $\int_a^{a+l}f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^l f(x)dx+\int_l^{a+l}f(x)dx$

对上述等式右端的第三个积分，令 $x-l=t$，则

$$\int_l^{a+l}f(x)dx=\int_0^a f(t+l)dt=\int_0^a f(t)dt .$$

故　$\int_a^{a+l}f(x)dx=\int_0^l f(x)dx$

3. 设 $f(x)$ 为连续函数，证明：$\int_0^R x^3 f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{R^2}xf(x)dx$.

证　设 $x=\sqrt{t}$，则

$$\int_0^R x^3 f(x)dx=\int_0^{R^2}t^{\frac{3}{2}}f(t)\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_0^{R^2}tf(t)dt,$$

故　$\int_0^R x^3 f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{R^2}xf(x)dx$.

4. 试证：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$，并由此计算$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx$.

证　令　$a+b-x=t$

右 $=\int_b^a f(t)(-dt)=\int_a^b f(x)dx=$ 左

$$原式=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x)}{(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x)\left[\pi-2(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x)\right]}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{x(\pi-2x)}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx$$

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{x(\pi-2x)}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\frac{1}{x}+\frac{2}{\pi-2x})dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{x}{\pi-2x}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\ln 2}{\pi}.$$

5. 若 $f(x)$ 在 $[1,a^2]$ $(a>1)$ 上连续，证明：$\int_1^a x^3 f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_1^{a^2} xf(x)dx.$

证　因为 $\int_1^a x^3 f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_1^a x^2 f(x^2)d(x^2)$， 令 $t=x^2$，则 $f(t)$ 在 $[1,a^2]$ 上连续，所以 $f(t)$ 在 $[1,a^2]$ 上可积，于是

$$\int_1^a x^3 f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_1^a x^2 f(x^2)d(x^2)=\frac{1}{2}\int_1^{a^2} tf(t)dt=\frac{1}{2}\int_1^{a^2} xf(x)dx\ .$$

6. 设 $f(x)$ 为连续函数，证明：$\int_0^x (x-t)f(t)dt=\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt$.

证　因为 $\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)f(t)dt=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)dt$，

$$\frac{d}{dx}[\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt]=\int_0^x f(u)du=\int_0^x f(t)dt,$$

所以

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt=\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt+c\ \text{（}c\text{ 为常数）}$$

在上述等式中取 $x=0$，得到 c=0，故所证等式成立.

二、定积分的不等式证明

★★1.设 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续,且严格单调增加,证明:

$$(a+b)\int_a^b f(x)dx < 2\int_a^b xf(x)dx$$

知识点：积分上限函数，函数的单调性

思路：把结果转化成积分上限函数，结果中的大小比较利用函数的单调性来求证

证:做辅助函数 $F(x)=(a+x)\int_a^x f(t)dt-2\int_a^x tf(t)dt$

则 $F'(x)=\int_a^x f(t)dt+(a+x)f(x)-2xf(x)=\int_a^x f(t)dt+(a-x)f(x)$

$$=\int_a^x f(t)dt-\int_a^x f(x)dt=\int_a^x\left[f(t)-f(x)\right]dt$$

又因为 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上严格单调增加且连续，

而 $t<x,\Rightarrow f(t)<f(x)\Rightarrow F'(x)=\int_a^x\left[f(t)-f(x)\right]dt<0$

所以 $F(x)$ 是严格减少，且 $F(a)=0$， $F(b)<F(a)=0.$

即 $(a+b)\int_a^b f(x)dx<2\int_a^b xf(x)dx$

★★★2.设 $f(x)\ge 0$ 与 $f''(x)\le 0$ 对 $x\in\left[a,b\right]$ 成立,试证

$$f(x)\le\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

知识点：泰勒公式，定积分的性质

解：将 $f(x)$ 在 $t\in[a,b]$ 处展成一阶泰勒公式，

$$f(x)=f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-t)^2,\xi\in(x,t)$$

因为 $f''(x)\le 0$，所以 $f''(\xi)\le 0$，于是：$f(x)\le f(t)+f'(t)(x-t)$

两边在 $\left[a,b\right]$ 上对 t 积分，得：$(b-a)f(x)\le\int_a^b f(t)dt+\int_a^b f'(t)(x-t)dt$

即 $(b-a)f(x)\le\int_a^b f(t)dt+f(t)(x-t)\Big|_a^b+\int_a^b f(t)dt$

$$=2\int_a^b f(t)dt+(x-b)f(b)-(x-a)f(a)$$

得 $2\int_a^b f(t)dt\ge(b-a)f(x)+(b-x)f(b)+(x-a)f(a)$

由于 $f(x)\ge 0,f(a)\ge 0,f(b)\ge 0,x-a>0,b-x>0,$

所以 $2\int_a^b f(t)dt\ge(b-a)f(x)$

即 $f(x) \le \dfrac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

★★★**3.**(2022 数一 20.数二 21)（**12 分**）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有二阶连续导数，证明：$f''(x)\ge 0$ 的充要条件为对不同实数

a,b，$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\le \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

（**法一**）不妨设 $b>a$. 在区间 $[a,b]$ 上，使用 $f(x)$ 在点 $\dfrac{a+b}{2}$ 处的二阶泰勒公式.

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2, \tag{1}$$

其中 ξ 介于 x 与 $\dfrac{a+b}{2}$ 之间.

将(1)式代入 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，可得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}x\\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &\quad+\frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意到

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\Big|_a^b-\frac{(a+b)(b-a)}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}-\frac{b^2-a^2}{2}=0,$$

故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x.$$

结合 $f''(x)\ge 0$ 可得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)(b-a)$，即 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\le \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

证明：“$\Rightarrow$”令 $F(x)=(x-a)f\left(\dfrac{a+x}{2}\right)-\int_a^x f(t)dt$，则 $F(a)=0$.

$$\begin{aligned}F'(x)&=f\left(\frac{a+x}{2}\right)+\frac{1}{2}(x-a)f'\left(\frac{a+x}{2}\right)-f(x)\\ &=\frac{1}{2}(x-a)f'\left(\frac{a+x}{2}\right)+f\left(\frac{a+x}{2}\right)-f(x)\\ &=\frac{1}{2}(x-a)f'\left(\frac{a+x}{2}\right)-f'(\xi)\frac{1}{2}(x-a)\\ &=\frac{1}{2}(x-a)\left[f'\left(\frac{a+x}{2}\right)-f'(\xi)\right]\end{aligned}$$

由于 $f''(x)\ge 0$，所以 $f'(x)$ 单增，从而 $f'\left(\dfrac{a+x}{2}\right)<f'(\xi)$，故 $F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减.

$x>a$, $F(x)<0$,则 $F(b)<0$，及 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\le\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

“$\Leftarrow$” $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$，取 $a=x_0-h, b=x_0+h$，其中 $h>0$，则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{\int_{x_0-h}^{x_0+h}f(x)\mathrm{d}x-2f(x_0)h}{2h}\ge0,$$

从而

$$\frac{\int_{x_0-h}^{x_0+h}f(x)\mathrm{d}x-2f(x_0)h}{2h^3}\ge0.$$

由 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\int_{x_0-h}^{x_0+h}f(x)\mathrm{d}x-2f(x_0)h}{2h^3}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{6h^2}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{12h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f''(x_0+h)+f''(x_0-h)}{12}$$

$$=\frac{1}{6}f''(x_0),$$

同时由极限的保号性知 $f''(x_0)\ge0$.

★★4. 设 $f(x)$、$g(x)$在区间$[a, b]$上均连续，证明:

(1) $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$;

证明 因为$[f(x)-\lambda g(x)]^2\ge0$，所以$\lambda^2 g^2(x)-2\lambda f(x)g(x)+f^2(x)\ge0$，从而

$$\lambda^2\int_a^b g^2(x)dx-2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b f^2(x)dx\ge0.$$

上式的左端可视为关于λ的二次三项式，因为此二次三项式大于等于 0，所以其判别式小于等于 0，即

$$4[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2-4\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx\le0,$$

亦即 $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$.

(2). 设 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续，且 $f(x)>0$. 证明 $\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\dfrac{dx}{f(x)}\ge(b-a)^2$.

证明 已知有不等式$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$，在此不等式中，取 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$，

$g(x)=\sqrt{f(x)}$，则有

$$\int_a^b[\sqrt{f(x)}]^2\cdot dx\cdot\int_a^b[\frac{1}{\sqrt{f(x)}}]^2dx\ge[\int_a^b\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx]^2,$$

即 $\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\dfrac{dx}{f(x)}\ge(b-a)^2$.

(3) $\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$,

证明 $\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx + 2\int_a^b f(x)g(x)dx$

$\le \int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx + 2[\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}}$,

又 $\int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx + 2[\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}} = \left([\int_a^b f^2(x)dx]^{\frac{1}{2}} + [\int_a^b g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}}\right)^2$,

所以 $\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$.