

第5章 定积分的恒等式和不等式证明

一、定积分的恒等式证明

1. 证明 $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 (1-x)^m x^n dx$, 并计算 $\int_0^1 x^2 (1-x)^7 dx$.

2. 设 $f(x)$ 是以 l 为周期的连续函数, 证明: 对任意实数 a , 有 $\int_a^{a+l} f(x) dx = \int_0^l f(x) dx$.

3. 设 $f(x)$ 为连续函数, 证明: $\int_0^R x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{R^2} xf(x) dx$.

4. 试证明 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$, 并由此计算 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)} dx$.

5. 若 $f(x)$ 在 $[1, a^2]$ ($a > 1$) 上连续, 证明: $\int_1^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_1^{a^2} xf(x) dx$.

6. 设 $f(x)$ 为连续函数, 证明: $\int_0^x (x-t)f(t)dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(u)du \right) dt$.

二、定积分的不等式证明

★★1. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且严格单调增加, 证明: $(a+b) \int_a^b f(x) dx < 2 \int_a^b xf(x) dx$

★★★2. 设 $f(x) \geq 0$ 与 $f''(x) \leq 0$ 对 $x \in [a, b]$ 成立, 试证 $f(x) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

★★★3. (2022 数一 20. 数二 21) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有二阶连续导数, 证明: $f''(x) \geq 0$ 的充要条件为对不同实

数 $a, b, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

★★4. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上均连续, 证明: (1) $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$;

(2) 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$. 证明 $\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2$.

(3) $\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$,