

第3章 微分中值定理与泰勒公式相关证明

一、【罗尔定理】

1. 【根的存在】

★1. 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内具有二阶导函数, 且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$

$(a < x_1 < x_2 < x_3 < b)$, 证明: 在 (x_1, x_3) 内至少有一点 ξ , 使得 $f''(\xi) = 0$ 。

★2. 不用求出函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数, 说明方程 $f'(x) = 0$ 有几个实根, 并指出它们所在的区间。

★3. 若 4 次方程 $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$ 有 4 个不同的实根, 证明:

$$4a_0x^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3 = 0$$

的所有根皆为实根。

★4. 设 $a_1 - \frac{a_2}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{a_n}{2n-1} = 0$, 证明方程

$a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \cdots + a_n \cos(2n-1)x = 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内至少有一个实根。

★5. 设 $f(x)$ 可导, 试证 $f(x)$ 的两个零点之间一定有函数 $f(x) + f'(x)$ 的零点。

2. 【构造函数】

★1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1) = 0$. 求证: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$.

★2. 设 $f(x)$ 于 $[0,\pi]$ 上连续, 于 $(0,\pi)$ 内可导, 求证: 存在 $\xi \in (0,\pi)$, 使得

$$f'(\xi) = -f(\xi) \cot \xi$$

★3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 可导, 且 $f(0)=1$, $f(1)=\frac{1}{e}$, 证: 在 $(0,1)$ 内, 有且仅有一点 ξ , 使 $f'(\xi)=-e^{-\xi}$ 。

★4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=f(1)=1$, $f'(1)=1$, 证: 在 $(0,1)$ 内, 有且仅有一点 c , 使 $f''(c)=2$ 。

★★5. 设函数 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A$, (A 为有限值). 试证: 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $f'(\xi) = 0$ 。

★★6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且 $0 < f(x) < 1$, 对于任何 $x \in (0,1)$, 都有 $f'(x) \neq 1$, 试证: 在 $(0,1)$ 内, 有且仅有一个数 ξ , 使 $f(\xi) = \xi$ 。

★★7. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 且 $f'_+(a) > 0, f'_-(b) > 0, f(a) = f(b) = A$, 试证明 $f'(x)$ 在 (a, b) 内至少有两个零点。

二、【拉格朗日中值定理】

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内有二阶导数, 且有

$$f(a) = f(b) = 0, f(c) > 0 \quad (a < c < b),$$

试证在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f''(\xi) < 0$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 试证: 对任意给定的正数 a, b 在 $(0, 1)$

内存在不同的 ξ, η , 使 $\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b$.

三、【柯西中值定理】

1. 设函数 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内具有 n 阶导数, 且

$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, 试用柯西中值定理证明:

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} (0 < \theta < 1)。$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明: 在 (a, b) 内存在点 ξ 和 η , 使

$$f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta)。$$

四、【泰勒中值定理】

1. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有 n 阶导数, 且 $f(a) = f(b) = f'(b) = f''(b) = \cdots = f^{(n-1)}(b) = 0$

证明在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f^{(n)}(\xi) = 0 (a < \xi < b)$ 。

2. 设在 $[1, +\infty)$ 上处处有 $f''(x) \leq 0$, 且 $f(1) = 2, f'(1) = -3$, 证明在 $(1, +\infty)$ 内方程 $f(x) = 0$ 仅有一实根。

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶连续导数, 且满足 $f(1) = f(0)$ 及 $|f''(x)| \leq M (x \in [0, 1])$, 证明对一切 $x \in [0, 1]$ 有 $|f'(x)| \leq \frac{M}{2}$ 成立.

4. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶连续导数, $|f(x)| \leq a, |f''(x)| \leq b, c \in (0, 1)$, 求证:
 $|f'(c)| \leq 2a + \frac{b}{2}$.

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1) = 0, f(0) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$, 证明存在一点 $\xi \in (-1, 1)$, 使 $f'''(\xi) \geq 3$.