

第九章 多元函数微分法及其应用

一、二元函数的定义域、二重极限判断与求值、多元函数的连续

【知识 1】

1. 二元函数: $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, D 为定义域.

【几何意义】: $z = f(x, y)$ 为空间曲面, D 为曲面在 xoy 面上投影.

2. 二重极限: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$.

【注】 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 为任意方式. 若 (x, y) 以不同方式趋于 (x_0, y_0) 时, $f(x, y)$ 无限靠近不同的常数, 则二重极限不存在.

3. 二元函数连续: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

【注】(1) 初等函数在其定义区域内连续. (2) 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$.

1. 【求函数的定义域、二重极限判断与求值、多元函数的连续性】

【例 1-1】1. 函数 $y = \sqrt{y-x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 的定义域为_____.

【答案】 $y \geq x$, $x > 0$, $x^2 + y^2 < 1$

【例 1-2】2. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} =$ (B).

A. 等于 0 B. 不存在 C. 等于 $\frac{1}{2}$ D. 存在且不等于 0 或 $\frac{1}{2}$

【例 1-3】3. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \pi}} \frac{\sin(xy)}{x} =$ _____.

【答案】 π

【练习 1】【求函数的定义域、二重极限判断与求值、多元函数的连续性】

4. 函数 $z = \arctan \frac{y}{\sqrt{1-x}}$ 的定义域为_____.

【答案】 $x < 1$

5. 函数 $z = \frac{\arcsin x}{y}$ 的定义域为_____.

【答案】 $-1 \leq x \leq 1, y \neq 0$

6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ (B)

A. 等于 0 B. 不存在 C. 等于 $\frac{1}{2}$ D. 存在且不等于 0 或 $\frac{1}{2}$

7. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + e^y}{\cos y - \sin x} =$ _____.

【答案】 1

8. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy} =$ _____

【答案】 $-\frac{1}{4}$

9. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$ _____.

[解析]: $0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \cdot |y| \leq |y|$, 又 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y| = 0$, $\therefore \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

二、偏导数、高阶偏导数与全微分

一、偏导数:

1. 定义: $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$

2. 几何意义: $z = f(x, y)$ 的偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 表示空间曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切线 T_x 关于 x 轴的斜率.

3. 偏导函数的求法:

- (1) 多元函数对某自变量求偏导时, 只需将其余自变量视为常数, 按一元函数求导法则计算导数.
- (2) 多元分段函数在分段点处偏导数要用偏导数定义来求.

二、高阶偏导数:

1. 二阶及二阶以上的偏导数称为高阶偏导数.

2. 若 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在区域 D 内连续, 则在 D 内这两个偏导数相等.

三、全微分

1. 定义: $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则称函数在点 (x, y) 可微,

$$\text{全微分 } dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

【注】(1) 若 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 可微, 则 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - dz}{\rho} = 0$; (2) 若 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - dz}{\rho} \neq 0$, 则 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 不可微.

2. 定理:

(1) 若 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 可微, 则 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 连续

(2) 若 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 可微, 则 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 偏导数存在, 且 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

(3) 若 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 在 (x, y) 处连续, 则函数在该点处可微.

2. 【求偏导数、高阶偏导数、全微分】

【例 2-1】1. 设 $z = x + (y - 2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$, 那么 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,2)} = (\quad D \quad)$.

- A. 0 B. 1 C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

【例 2-2】2. $u = xy + \frac{y}{x}$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2y}{x^3}$

【例 2-3】3. 设 $z = (1+x)^y$, 则 $dz =$ _____.

【答案】 $y(1+x)^{y-1} dx + (1+x)^y$

【练习 2-1】【求偏导数】

4. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续是它在该点偏导数存在的 (D) .

- (A) 必要而非充分条件 (B) 充分而非必要条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

5. 设函数 $f(x, y)$ 在 (a, b) 的偏导数存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x, b) - f(a-x, b)}{x} =$ (D) .

- (A) 0 (B) $f_x(2a, b)$ (C) $f_x(a, b)$ (D) $2f_x(a, b)$

6. 若 $f(x, 2x) = x^2 + 3x$, $f'_x(x, 2x) = 6x + 1$, 则 $f'_y(x, 2x) =$ (C) .

- (A) $x + \frac{3}{2}$ (B) $x - \frac{3}{2}$ (C) $2x + 1$ (D) $-2x + 1$

7. 若 $f(x, x^2) = x^3$, $f'_x(x, x^2) = x^2 - x^4$, 则 $f'_y(x, x^2) =$ (B) .

- (A) $2x^2 + 2x^4$ (B) $x + x^3$ (C) $x^2 + x^5$ (D) $2x + 2x^2$

8. 曲线 $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$ 在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线与 x 轴正向所成的倾角是多少?

思路: $z = f(x, y)$ 的偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 表示空间曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切线 T_x 关于 x 轴的斜率,

$k = \tan \alpha$.

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$, $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2, 4, 5)} = \frac{2}{2} = 1 = \tan \alpha$,

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$

9. 设 $f(x, y) = xye^x$, 则 $f'_x(1, x) =$ (C) .

- (A) 0 (B) e (C) $2xe$ (D) $1+ex$

10. 设 $f(x, y) = \arcsin \sqrt{\frac{y}{x}}$, 则 $f'_x(2, 1) =$ (A) .

- (A) $-\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

11. 设 $z = (1+x)^{x+y}$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1, 1)} =$ (B) .

- (A) $1+\ln 2$ (B) $4(1+\ln 2)$ (C) 4 (D) 8

12. 求函数 $z = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt$ 的偏导数

思路: 积分上限函数求导法则 $\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t) dt\right)' = f(\varphi(x))\varphi'(x)$, 及二元函数求偏导法则。

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-(xy)^2} \cdot y = ye^{-x^2y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-(xy)^2} \cdot x = xe^{-x^2y^2}$

13. 设 $z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$, 其中 $\varphi(u)$ 可导, 证明 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 = xy \frac{\partial z}{\partial y}$ 。

证: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y^2}{3x^2} + \varphi'(xy)y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{3} \frac{y}{x} + \varphi'(xy)x$,

左边 $= x^2 \left(-\frac{y^2}{3x^2} + \varphi'(xy)y\right) + y^2 = \frac{2}{3}y^2 + x^2y\varphi'(xy)$;

右边 $= xy \left(\frac{2}{3} \frac{y}{x} + \varphi'(xy)x\right) = \frac{2}{3}y^2 + x^2y\varphi'(xy)$, 所以 左边=右边, 题目得证。

【练习 2-2】【求高阶偏导数】

14. 设 $u = x \ln xy$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{y}$

15. 设 $u = x^2 \sin y + y^2 \cos x$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} =$ _____.

【答案】 $2x \cos y - 2y \sin x$

【练习 2-3】【求全微分】

16. 设 $z = x^3y^2 - x^2 - e^y$, 则 $dz =$ _____.

【答案】 $(3x^2y^2 - 2x)dx + (2x^3y - e^y)dy$

17. 设 $f(x, y, z) = \ln(xy + z)$, 则 $df(1, 2, 0) =$ _____.

【答案】 $dx + \frac{1}{2}dy + \frac{1}{2}dz$

18. 设 $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$ ($f(x, y)$ 具有一阶连续导数), 求 du .

$$\text{解: } du = f'_1 d\frac{x}{y} + f'_2 d\frac{y}{z} = \frac{1}{y} f'_1 dx + \left(\frac{1}{z} f'_2 - \frac{x}{y^2} f'_1 \right) dy - \frac{y}{z^2} f'_2 dz$$

19. 设 $z = f(x, y)$ 是由方程 $z - y - x + xe^{z-y-x} = 0$ 所确定的二元函数, 求 dz .

解: 两边求微分

$$dz - dy - dx + e^{z-y-x} dx + xe^{z-y-x} (dz - dy - dx) = 0$$

$$\text{所以 } dz = \frac{1 + (x-1)e^{z-y-x}}{1 + xe^{z-y-x}} dx + dy$$

三、复合函数求导法则、隐函数求导公式(解答题、证明题)

一、复合函数求导法则

$$1. z = f(u(t), v(t)) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}$$

$$2. z = f[u(x, y), v(x, y)] \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$3. z = f[u(x, y), v(y)] \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dy}$$

$$\text{【注】 } z = f(x, y, u(x, y)) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y}$$

二、隐函数求导公式

$$1. \text{若 } F(x, y) = 0 \text{ 确定 } y = f(x), \text{ 则 } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y};$$

$$2. \text{若 } F(x, y, z) = 0 \text{ 确定 } z = f(x, y), \text{ 则 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z};$$

$$3. \text{若方程组 } \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \text{ 确定二元函数 } y = y(x), z = z(x).$$

则方程两边同时对 x , 求解方程组即可.

3. 【求多元复合函数的导数、隐函数的导数】

$$\text{【例 3-1】} 1. \text{ 设 } z = e^{3x+2y}, x = \cos t, y = t^2, \text{ 则 } \frac{dz}{dt} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{【答案】 } -3e^{3x+2y} \sin t + 4te^{3x+2y}$$

2. 设 $z = ue^v$, 其中 $u = x^2 + y^2, v = xy$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

【答案】 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^v(2x) + ue^v y = e^v(2x + uy)$

3. 求函数 $z = f(xy, y)$ 的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (其中 f 具有二阶连续偏导数)

解: 令 $u = xy$, 则函数为 $z = f(u, y), u = xy$ 复合而成的函数, 其中变量 y 既是中间变量又是自变量, 按复合函数求导法有:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 0 = y f'_u, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = x f'_u + f'_y \quad (\text{其中 } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ 是函数对中间变量 } y \text{ 的偏导数, 求解}$$

时将中间变量 u 看作常量)

又由 $f(u, y)$ 为 u, y 的函数, 所以 f'_u, f'_y 仍为以 u, y 为中间变量, 以 x, y 为自变量的函数, 故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial(y f'_u)}{\partial x} = y \left(\frac{\partial f'_u}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f'_u}{\partial y} \cdot 0 \right) = y^2 f''_{uu}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(y f'_u)}{\partial y} = y \left(\frac{\partial f'_u}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f'_u}{\partial y} \right) + f'_u = x y f''_{uu} + y f''_{uy} + f'_u$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial(x f'_u + f'_y)}{\partial y} = x \left(\frac{\partial f'_u}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f'_u}{\partial y} \right) + \frac{\partial f'_y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f'_y}{\partial y}$$

$$= x^2 f''_{uu} + x f''_{uy} + x f''_{yu} + f''_{yy} = x^2 f''_{uu} + 2x f''_{uy} + f''_{yy}$$

【例 3-2】4. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\sin x + 2y - z = e^z$ 所确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{\cos x}{1 + e^z}$

5. 设 z 为由方程 $f(x + y, y + z) = 0$ 所确定的函数, 求 $dz, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解: 方法一:

函数为 $f(x + y, y + z) = 0, z = z(x, y)$; 令 $u = x + y, v = y + z$

$$\text{方程两边同时关于 } x \text{ 求偏导 } f'_u + f'_v \frac{\partial z}{\partial x} = 0, (1) \quad \text{整理得 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_u}{f'_v}$$

方程两边同时关于 y 求偏导

$$f'_u + f'_v \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \quad \text{整理得 } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_u + f'_v}{f'_v} \therefore dz = -\frac{1}{f'_v} [f'_u dx + (f'_u + f'_v) dy]$$

在 (1) 式两边再关于 x 求偏导 (注意 z 为 x, y 的函数) $f''_{uu} + f''_{uv} \frac{\partial z}{\partial x} + (f''_{vu} + f''_{vv} \frac{\partial z}{\partial x}) \frac{\partial z}{\partial x} + f'_v \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$

$$\text{整理得 } f_{uu}'' - \frac{f_u'}{f_v'} f_{uv}'' - \frac{f_u'}{f_v'} f_{vu}'' + \frac{f_u'^2}{f_v'^2} f_{vv}'' + f_v' \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-f_{uu}'' f_v' + f_u' f_{uv}'' + f_u' f_{vu}''}{f_v'^2} - \frac{f_u'^2 f_{vv}''}{f_v'^3}$$

方法二：求 dz 时也可用全微分形式的不变性

$$df(x+y, y+z) = d(0) \quad , \quad f_u' d(x+y) + f_v' d(y+z) = 0 \quad \text{故} \quad f_u'(dx+dy) + f_v'(dy+dz) = 0$$

$$\text{整理得 } dz = -\frac{1}{f_v'} (f_u' dx + (f_u' + f_v') dy), \quad \text{故} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_u'}{f_v'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_u' + f_v'}{f_v'}$$

6. 证明由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 满足关系式 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$, 其中 F 具有连

续的一阶偏导数.

$$\text{证: } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{F_1' \left(-\frac{y}{x^2}\right) + F_2' \left(-\frac{z}{x^2}\right)}{F_2' \cdot \frac{1}{x}} = \frac{yF_1' + zF_2'}{xF_2'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{F_1' \cdot \frac{1}{x}}{F_2' \cdot \frac{1}{x}} = -\frac{F_1'}{F_2'}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = x \cdot \frac{yF_1' + zF_2'}{xF_2'} + y \cdot \left(-\frac{F_1'}{F_2'}\right) - z = 0$$

【练习 3-1】【求多元复合函数的导数】

7. 若 $z = f(x^2 + y^2)$, 则 $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

【答案】0

8. 设 $z = xf(x, y)$, $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, $\frac{\partial f}{\partial y}\big|_{(0,1)} = 2$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\big|_{(0,1)} =$ _____.

【答案】2

9. 求函数 $z = f\left(\frac{y}{x}, x^2 y\right)$ 的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (其中 f 具有二阶连续偏导数)

解: 令 $u = \frac{y}{x}, v = x^2 y$, 则函数为 $z = f(u, v)$, $u = \frac{y}{x}, v = x^2 y$ 复合而成, 按多元复合函数求导法:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-y}{x^2} f_u' + 2xy f_v', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x} f_u' + x^2 f_v'$$

由 $f(u, v)$ 为 u, v 的函数, 所以 f_u', f_v' 仍为以 u, v 为中间变量, 以 x, y 为自变量的函数, 故

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial(-\frac{y}{x^2}f'_u + 2xyf'_v)}{\partial x} = \frac{-y}{x^2}(\frac{\partial f'_u}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f'_u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{2y}{x^3}f'_u + 2xy(\frac{\partial f'_v}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f'_v}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}) + 2yf'_v \\
 &= \frac{-y}{x^2}(f''_{uu} \cdot \frac{-y}{x^2} + f''_{uv} \cdot 2xy) + \frac{2y}{x^3}f'_u + 2xy(f''_{vu} \cdot \frac{-y}{x^2} + f''_{vv} \cdot 2xy) + 2yf'_v \\
 &= \frac{y^2}{x^4}f''_{uu} - \frac{4xy^2}{x^2}f''_{uv} + \frac{2y}{x^3}f'_u + 4x^2y^2f''_{vv} + 2yf'_v \quad (f \text{ 具连续二阶偏导数 } f''_{uv} = f''_{vu})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial(-\frac{y}{x^2}f'_u + 2xyf'_v)}{\partial y} = \frac{-y}{x^2}(\frac{\partial f'_u}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f'_u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}) - \frac{1}{x^2}f'_u + 2xy(\frac{\partial f'_v}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f'_v}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}) + 2xf'_v \\
 &= \frac{-y}{x^2}(f''_{uu} \cdot \frac{1}{x} + f''_{uv} \cdot x^2) - \frac{1}{x^2}f'_u + 2xy(f''_{vu} \cdot \frac{1}{x} + f''_{vv} \cdot x^2) + 2xf'_v \\
 &= \frac{-y}{x^3}f''_{uu} + yf''_{uv} - \frac{1}{x^2}f'_u + 2x^3yf''_{vv} + 2xf'_v \quad (f \text{ 具连续二阶偏导数 } f''_{uv} = f''_{vu})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial(\frac{1}{x}f'_u + x^2f'_v)}{\partial y} = \frac{1}{x}(\frac{\partial f'_u}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f'_u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}) + x^2(\frac{\partial f'_v}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f'_v}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}) \\
 &= \frac{1}{x}(f''_{uu} \cdot \frac{1}{x} + f''_{uv} \cdot x^2) + x^2(f''_{vu} \cdot \frac{1}{x} + f''_{vv} \cdot x^2) = \frac{1}{x^2}f''_{uu} + 2xf''_{uv} + x^4f''_{vv} \quad (f \text{ 具连续二阶偏导数 } f''_{uv} = f''_{vu})
 \end{aligned}$$

【练习 3-2】【求多元隐函数的导数】

10. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^z - z + xy = 3$ 所确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

【答案】 $\frac{y}{1-e^z}$

11. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$ 所确定, 则全微分 $dz =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{z^2 - xy}[(yz - x^2)dx + (xz - y^2)dy]$

12. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $xyz = a$ (a 为非零常数) 所确定, 证明: $xz_x + yz_y = -2z$.

证: 令 $F = xyz - a$, 则 $F_x = yz, F_y = xz, F_z = xy$,

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{z}{x}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{z}{y}, \quad xz_x + yz_y = -z - z = -2z$$

13. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $3\cos(x + 2y + 3z) = x + 2y + 3z$ 所确定, 试证 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -1$.

证: $-3\sin(x + 2y + 3z)(dx + 2dy + 3dz) = dx + 2dy + 3dz$

$$dz = \frac{-[1 + 3\sin(x + 2y + 3z)]dx - 2[1 + 3\sin(x + 2y + 3z)]dy}{3[1 + 3\sin(x + 2y + 3z)]}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2}{3}, \quad \text{则 } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -1$$

14. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $1 + x + 2y - z = e^z$ 所确定, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

【解析】 $1 - z_x = e^z z_x$, $z_x = \frac{1}{1 + e^z}$, $2 - z_y = e^z z_y$, $z_y = \frac{2}{1 + e^z}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{e^z \cdot z_y}{(1 + e^z)^2} = -\frac{2 \cdot e^z}{(1 + e^z)^3}$$

15. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $f(y - x, yz) = 0$ 所确定, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-f_1}{yf_2} = \frac{1}{y} \frac{f_1}{f_2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{y} \cdot \frac{(-f_{11} + yf_{12} \frac{\partial z}{\partial x})f_2 - (-f_{21} + yf_{22} \frac{\partial z}{\partial x})f_1}{f_2^2} = -\frac{f_{11}}{yf_2} + \frac{2f_{12}f_1}{yf_2^2} - \frac{f_{22}f_1^2}{yf_2^3}$$

16. 设函数 $z = f(x, y)$ 由方程 $F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$ 所确定, 证明 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

证: 方法一: (应用隐函数存在定理公式)

设 $G(x, y, z) = F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x})$, 令 $u = x + \frac{z}{y}, v = y + \frac{z}{x}$

则 $G_x = F'_u \cdot 1 + F'_v \cdot (-\frac{z}{x^2}) = F'_u - \frac{z}{x^2} F'_v$; $G_y = F'_u \cdot (-\frac{z}{y^2}) + F'_v \cdot 1 = -\frac{z}{y^2} F'_u + F'_v$;

$$G_z = F'_u \cdot \frac{1}{y} + F'_v \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{y} F'_u + \frac{1}{x} F'_v$$

故 $x \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 G'_x}{x G'_z} = -\frac{x^2 y F'_u - z y F'_v}{x F'_u + y F'_v}$; $y \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 G'_y}{y G'_z} = -\frac{-xz F'_u + xy^2 F'_v}{x F'_u + y F'_v}$

$$\begin{aligned} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-x^2 y F'_u + z y F'_v + xz F'_u - xy^2 F'_v}{x F'_u + y F'_v} \\ &= \frac{z(x F'_u + y F'_v) - xy(x F'_u + y F'_v)}{x F'_u + y F'_v} = z - xy \end{aligned}$$

四、求空间曲线切线和法平面方程、求空间曲面的切平面和法线方程

一、空间曲线切线和法平面方程

1. 曲线的参数方程为 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, 则曲线的切向量为 $\vec{T} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$

则切线方程 $\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}$; 法平面方程为 $x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0) = 0$

2. 曲线 L 为 $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$, 则曲线的切向量为 $\vec{T} = \{1, y'(x_0), z'(x_0)\}$, 则

切线方程 $\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{y'(x_0)} = \frac{z-z_0}{z'(x_0)}$; 法平面方程为 $x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0) = 0$

3. 曲线方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, F, G 具连续偏导数, 则曲线在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处

切向量为 $\vec{T} = \left\{ \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{M_0}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{M_0} \right\}$,

二、空间曲面的切平面和法线方程

1. 曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$, 则曲面在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处法向量为

$$\vec{n} = \{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\},$$

则切平面方程为 $F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0$

法线方程为 $\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$

2. 曲面方程为 $z = f(x, y)$ 则曲面在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的法向量为 $\vec{n} = \{-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1\}$

切平面方程为: $f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$ 或 $f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0) = z-z_0$

(上式表明函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的全微分, 在几何上表示曲面 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的切平面上点的竖坐标的增量。)

法线方程为 $\frac{x-x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$

4. 【求空间曲线切线和法平面方程、求空间曲面的切平面和法线方程】

【例 4-1】1. 曲线 $x = 2 \sin t, y = 4 \cos t, z = t$ 在点 $(2, 0, \frac{\pi}{2})$ 处的法平面方程是 (C) .

(A) $2x - z = 4 - \frac{\pi}{2}$ (B) $2x - z = \frac{\pi}{2} - 4$ (C) $4y - z = -\frac{\pi}{2}$ (D) $4y - z = \frac{\pi}{2}$

2. 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z = x^2 - y^2 \end{cases}$ 在点 $(1, 2, -3)$ 处的切线方程为 (C) .

(A) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{8}$ (B) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-8}$
(C) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{8}$ (D) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{8}$

【例 4-2】3. 曲面 $x^3 - 2xy - xz^2 - y^2z = 11$ 在点 $(3, 1, -2)$ 处的法线方程是 (A) .

(A) $\frac{x-3}{21} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{11}$ (B) $\frac{x-3}{21} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{11}$
(C) $\frac{x+18}{21} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+13}{11}$ (D) $\frac{x-3}{21} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{-11}$

4. 曲面 $z = 2x^2 + 3y^2$ 在点 $(1, 2, 14)$ 处的切平面方程为 (D) .

(A) $4x + 12y + z = 14$ (B) $4x + 12y + z = 42$ (C) $4x + 12y - z = 42$ (D) $4x + 12y - z = 14$

【练习 4-1】【求空间曲线的切线和法平面方程】

5. 曲线 $x = t, y = -t^2, z = t^3$ 的所有切线中, 与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的切线 (B) .

(A) 只有一条 (B) 只有两条 (C) 至少有三条 (D) 不存在

6. 曲线 $x = t, y = 4\sqrt{t}, z = t^2$ 在点 $(4, 8, 16)$ 处的法平面方程为 (B) .

(A) $x - y - 8z = -132$ (B) $x + y + 8z = 140$ (C) $x - y + 8z = 124$ (D) $x + y - 8z = 116$

7. 曲线 $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x^2 - y^2 - z^2 = -2 \end{cases}$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的法平面方程为 (C) .

(A) $x + y + z = 0$ (B) $x + y = 0$ (C) $2x + y + z = 0$ (D) $y + z = 0$

8. 曲线 $4x = y^5, y = \sqrt{z}$, 在点 $(8, 2, 4)$ 处的切线方程是 (A) .

(A) $\frac{x-8}{20} = y-2 = \frac{z-4}{4}$ (B) $\frac{x+12}{20} = y = \frac{z+4}{4}$ (C) $\frac{x-8}{5} = y-2 = \frac{z-4}{4}$ (D) $\frac{x-3}{5} = y-1 = \frac{z}{4}$

9. 求曲线 $x = 2t - t^2, y = t, z = t^3 - 9t$ 上的点, 使曲线在该点处的切线垂直于平面 $2x - y - 3z + 1 = 0$.

解: 设所求的点对应于 $t = t_0$, 对应的切线方向向量 $\vec{S} = \{2 - 2t_0, 1, 3t_0^2 - 9\}$

$\vec{S}$ 平行于平面法向量 $\vec{n} = \{2, -1, -3\}$, $\frac{2-2t_0}{2} = \frac{1}{-1} = \frac{3t_0^2-9}{-3}$, 解得: $t_0 = 2$, 所求点为 $(0, 2, -10)$.

10. 求曲线 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y-z=3 \end{cases}$ 上的点, 使曲线在该点的切线平行于平面 $2x+y-z=3$, 并写出曲线在该点的法平面方程.

解: 设所求点为 $P(x_0, y_0, z_0)$, 由 $\begin{cases} 1+y'|_P+z'|_P=0 \\ 2x_0+y'|_P-z'|_P=0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} y'|_P=-x_0-\frac{1}{2} \\ z'|_P=x_0-\frac{1}{2} \end{cases}$

对应的切线方向向量 $\vec{S} = \left\{ 1, -x_0 - \frac{1}{2}, x_0 - \frac{1}{2} \right\}$, $\vec{S}$ 垂直于平面法向量 $\vec{n} = \{2, 1, -1\}$

$\vec{S} \cdot \vec{n} = 2 - 2x_0 = 0$, 解得: $x_0 = 1$, 所求点为 $(1, 1, -1)$,

法平面方程为 $2(x-1) - 3(y-1) + (z+1) = 0$ 或 $2x - 3y + z + 2 = 0$

【练习 4-2】【求空间曲面的切平面和法线方程】

11. 求圆锥曲面 $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ 在点 $(1, -1, 1)$ 处的切平面和法线方程.

解: 切平面方程 $4(x+1) - 2(y-\frac{1}{2}) + (z-\frac{5}{2}) = 0$; 法线方程 $\frac{x+1}{4} = \frac{y-\frac{1}{2}}{-2} = \frac{z-\frac{5}{2}}{-2}$

12. 求旋转抛物面 $z = 2x^2 + 2y^2$ 在点 $(-1, \frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ 处的切平面和法线方程.

解: 切平面方程 $(x-1) - (y+1) - 2(z-1) = 0$; 法线方程 $x-1 = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-2}$

13. 在曲面 $3x^2 + 5y^2 + z^2 = 30$ 上求一点, 使曲面在该点处的切平面平行于平面 $3x - 2y - z = 4$, 并写出此切平面方程.

解: 曲面上点 (x, y, z) 处的切平面法向量 $\vec{n} = \{6x, 10y, 2z\}$,

$\vec{n}$ 平行于平面的法向量 $\vec{n}_1 = \{3, -2, -1\}$, $\frac{6x}{3} = \frac{10y}{-2} = \frac{2z}{-1}$

代入曲面方程, 得 $x = \pm \frac{5}{2}, y = \mp 1, z = \mp \frac{5}{2}$, 点 $(\frac{5}{2}, -1, -\frac{5}{2})$ 和 $(-\frac{5}{2}, 1, \frac{5}{2})$

切平面方程 $3(x - \frac{5}{2}) - 2(y + 1) - (z + \frac{5}{2}) = 0$ 和 $3(x + \frac{5}{2}) - 2(y - 1) - (z - \frac{5}{2}) = 0$

或 $3x - 2y - z - 12 = 0$ 和 $3x - 2y - z + 12 = 0$

14. 求曲面 $x^2 - y^2 - z^2 + 6 = 0$ 垂直于直线 $\frac{x-3}{2} = y-1 = \frac{z-2}{-3}$ 的切平面方程.

解: 曲面上点 (x, y, z) 处的切平面法向量 $\vec{n} = \{2x, -2y, -2z\}$

$\vec{n}$ 平行于直线的方向向量 $\vec{S} = \{2, 1, -3\}$, $\frac{2x}{2} = \frac{-2y}{1} = \frac{-2z}{-3}$

代入曲面方程, 得 $x = \pm 2, y = \mp 1, z = \pm 3$, 点 $(2, -1, 3)$ 和 $(-2, 1, -3)$

切平面方程 $2(x-2) + (y+1) - 3(z-3) = 0$ 和 $2(x+2) + (y-1) - 3(z+3) = 0$

或 $2x + y - 3z + 6 = 0$ 和 $2x + y - 3z - 6 = 0$

15. 在曲面 $z = xy$ 上求一点, 使这点处的法线垂直于平面 $x + 3y + z + 9 = 0$, 写出该法线的方程.

解: $z_x = y, z_y = x$

设该点为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 则曲面的在该点的法向量为 $\mathbf{n} = \{y_0, x_0, -1\}$

由题设可知 $\mathbf{n} \parallel \mathbf{n}_1$, 其中 $\mathbf{n}_1 = \{1, 3, 1\}$ 为已知平面的法向量

$$\therefore \frac{y_0}{1} = \frac{x_0}{3} = \frac{-1}{1} \quad (1), \text{ 又 } z_0 = x_0 y_0 \quad (2)$$

$$\therefore x_0 = -3, y_0 = -1, z_0 = 3, \text{ 法线方程为 } \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

五、方向导数与梯度

一、方向导数

1. 定义: $\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\rho}$

2 定理 若 $z = f(x, y)$ 在 $P(x, y)$ 处可微, 则 $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta$.

3. 计算: (1) $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta$; (2) $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$

二、梯度

1. (1) $\text{grad} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\}$

(2) $\text{grad} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\}$

【注】梯度为一向量: 其方向与取得最大方向导数的方向一致, 它的模为方向导数的最大值.

5. 【求方向导数与梯度】

【例 5-1】1. 函数 $z = xy^2$ 在点 $(1, 2)$ 沿 $\vec{a} = \{1, 1\}$ 方向的方向导数是_____.

【答案】 $\frac{8}{\sqrt{2}}$

2. 函数 $z = 2x + y$ 在点 $(1, 2)$ 沿各方向的方向导数的最大值为 (C).

- (A) 3 (B) 0 (C) $\sqrt{5}$ (D) 2

【例 5-1】3. 函数 $z = 2x^2 + y^2$ 在点 $(1, 1)$ 处的梯度为 (A).

- (A) $4\vec{i} + 2\vec{j}$ (B) $-4\vec{i} + 2\vec{j}$ (C) $4\vec{i} - 2\vec{j}$ (D) $-4\vec{i} - 2\vec{j}$

【练习 5】【求方向导数与梯度】

4. 函数 $f(x, y) = e^{-x} \sin(x + 2y)$ 在点 $(0, \frac{\pi}{4})$ 处沿 y 轴负向的方向导数是_____.

【答案】0

5. 函数 $z = \ln(x + \frac{y}{2})$ 在点 $(1, 3)$ 沿 $\vec{a} = \{1, -1\}$ 方向的方向导数是_____.

【答案】 $\frac{1}{5\sqrt{2}}$

6. 设函数 $u = 2xy - z^2$, 则 u 在点 $(2, -1, 1)$ 处方向导数最大值为 (A).

- (A) $2\sqrt{6}$ (B) 4 (C) 2 (D) $\{-2, -4, -2\}$

7. 函数 $z = x^2 + y^2$ 在 $(1, 1)$ 点沿 $\vec{l} = \{-1, -1\}$ 方向的方向导数为 (B).

- (A) 最大 (B) 最小 (C) 0 (D) 1

8. 数量场 $u = x^2y^2 + yz^3$ 在点 $(1, 2, 1)$ 处的梯度为_____.

【答案】 $\{8, 5, 6\}$

8. 函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在点 $M(1, 2, -2)$ 处的梯度 $\text{gradu}|_M =$ _____.

【答案】 $\{2, 4, -4\}$

六、求多元函数的极值和最大值最小值

一、无条件极值

1. (充分条件) 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处具有二阶连续偏导数, 且 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$,

令 $f''_{xx}(x_0, y_0) = A, f''_{xy}(x_0, y_0) = B, f''_{yy}(x_0, y_0) = C$, 则

(1) 当 $AC - B^2 > 0$ 时, 函数在 (x_0, y_0) 处有极值, 且 $A > 0$ 时有极小值, $A < 0$ 时有极大值。

(2) 当 $AC - B^2 < 0$ 时, 函数在 (x_0, y_0) 处没有极

(3) 当 $AC - B^2 = 0$ 时, 不确定。

二、条件极值

求函数 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ 下的极值的方法:

方法一: 化为无条件极值。即在方程 $\varphi(x, y, z) = 0$ 下解出 $z = z(x, y)$, 代入目标函数, 按无条件极值计算。

方法二: 拉格朗日乘子法。即作辅助函数 $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z)$

$$\text{由} \begin{cases} L_x = f'_x(x, y, z) + \lambda\varphi'_x(x, y, z) = 0 \\ L_y = f'_y(x, y, z) + \lambda\varphi'_y(x, y, z) = 0 \\ L_z = f'_z(x, y, z) + \lambda\varphi'_z(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases} \text{解出可能极值点 } (x_0, y_0, z_0), \text{ 而后判断是否为所求。}$$

注: 若约束条件不止一个, 可增加拉格朗日乘子。

如: 函数 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0, \phi(x, y, z) = 0$ 下的极值,

则作辅助函数 $L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\phi(x, y, z)$

6. 【求多元函数的极值】

【例 6-1】1. 求 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值。

$$\text{解 令} \begin{cases} f'_x(x, y) = 3x^2 - 3y = 0, \\ f'_y(x, y) = 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \text{解之, 得驻点 } P_1(0, 0), P_2(1, 1). \text{ 又 } f''_{xx} = 6x, f''_{xy} = -3, f''_{yy} = 6y.$$

在点 $P_1(0, 0)$ 处, $A = 0, B = -3, C = 0$. 由于 $AC - B^2 = -9 < 0$, 所以点 $P_1(0, 0)$ 不是极值点。

在点 $P_2(1, 1)$ 处, $A = 6, B = -3, C = 6$. 由于 $AC - B^2 = 27 > 0$, 且 $A = 6 > 0$, 故函数在点 $P_2(1, 1)$ 处取得极小值

$$f(1, 1) = -1.$$

【例 6-2】2. 修建一座容积为 V , 形状为长方体的厂房, 已知屋顶每单位面积的造价是墙壁每单位面积造价的两倍, 地面造价不计, 问如何设计, 可使其造价最低?

解: 设长方体的长、宽、高分别为 x, y, z , 墙壁每单位造价为 k ,

则总造价为 $C = 2kxy + 2kxz + 2kyz$, 且 $xyz = V$

令 $L = 2kxy + 2kxz + 2kyz + \lambda(xyz - V)$,

$$\text{由 } \begin{cases} L_x = 2ky + 2kz + \lambda yz = 0 \\ L_y = 2kx + 2kz + \lambda xz = 0 \\ L_z = 2kx + 2ky + \lambda xy = 0 \\ L_\lambda = xyz - V = 0 \end{cases}, \text{ 得 } x = y = z = \sqrt[3]{V}$$

由于实际问题的最小值必定存在, 因此当厂房的长、宽、高取相同值 $\sqrt[3]{V}$ 时, 其造价最低。

【练习 6-1】【求多元函数的极值-无条件极值】

3. $z_x(x_0, y_0) = 0$ 和 $z_y(x_0, y_0) = 0$ 是函数 $z = z(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极大值或极小值的 (D) .

(A) 必要条件但非充分条件

(B) 充分条件但非必要条件

(C) 充要条件

(D) 既非必要条件也非充分条件

4. 求函数 $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$ 的极值.

$$\text{解: 解方程组 } \begin{cases} f_x = 4 - 2x = 0 \\ f_y = -4 - 2y = 0 \end{cases} \quad \text{得驻点 } (2, -2)$$

$$\text{又 } A = f_{xx}(2, -2) = -2 < 0, B = f_{xy}(2, -2) = 0, C = f_{yy}(2, -2) = -2, AC - B^2 = 4 > 0$$

所以函数在点 $(2, -2)$ 处取得极大值 $f(2, -2) = 8$

5. 求函数 $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ 的极值.

$$\text{解: 解方程组 } \begin{cases} f_x = e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1) = 0 \\ f_y = e^{2x}(2y + 2) = 0 \end{cases} \quad \text{得驻点 } \left(\frac{1}{2}, -1\right)$$

$$\text{又 } A = f_{xx}\left(\frac{1}{2}, -1\right) = 2e > 0, B = f_{xy}\left(\frac{1}{2}, -1\right) = 0, C = f_{yy}\left(\frac{1}{2}, -1\right) = 2e, AC - B^2 = 4e^2 > 0$$

所以函数在点 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 处取得极小值 $f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{e}{2}$

6. 求函数 $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$ ($x > 0, y > 0$) 的极值.

$$\text{解: 解方程组 } \begin{cases} f_x = -\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y} = 0 \\ f_y = -\frac{x}{y^2} + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{得驻点 } (4, 2),$$

$$\text{又 } A = f_{xx}(4, 2) = \frac{1}{4} > 0, B = f_{xy}(4, 2) = -\frac{1}{4}, C = f_{yy}(4, 2) = 1, AC - B^2 = \frac{3}{16} > 0$$

所以函数在点 $(4, 2)$ 处取得极小值 $f(4, 2) = 6$

7. 求由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ 确定的函数 $z = f(x, y)$ 的极值。

解: 方法一: 在方程两边同时对 x 求偏导得 $2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} - 2 - 4 \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-x}{z-2}$

在方程两边同时对 y 求偏导得: $2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} + 2 - 4 \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1+y}{z-2}$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-x}{z-2} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1+y}{z-2} = 0 \end{cases} \quad \text{得驻点 } (1, -1), \text{ 且 } x=1, y=-1 \text{ 时 } z=-2 \text{ 或 } z=6$$

$$\text{又 } z''_{xx} = \frac{-(z-2)^2 - (1-x)^2}{(z-2)^3}; z''_{xy} = \frac{(1-x)(1+y)}{(z-2)^3}; z''_{yy} = \frac{-(z-2)^2 - (1+y)^2}{(z-2)^3}$$

故 $z = -2$ 时 $A = \frac{1}{4}, B = 0, C = \frac{1}{4}, AC - B^2 = \frac{1}{16} > 0$, 又 $A = \frac{1}{4} > 0$, 故函数在点 $(1, -1)$ 处取得极小值 -2

$z = 6$ 时 $A = -\frac{1}{4}, B = 0, C = -\frac{1}{4}, AC - B^2 = \frac{1}{16} > 0$, 又 $A = -\frac{1}{4} < 0$, 故函数在点 $(1, -1)$ 处取得极大值 6

方法二: (本题特殊性, 可用配方法)

原方程可变为 $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 16$ (以 $(1, -1, 2)$ 为中心, 4 为半径的球面)

$$\text{故 } z = 2 \pm \sqrt{16 - (x-1)^2 - (y+1)^2},$$

当 $x=1, y=-1$ 时, $\sqrt{16 - (x-1)^2 - (y+1)^2}$ 取得极大值 4 , 故 $z = 2 + 4 = 6$ 为极大值, $z = 2 - 4 = -2$ 为极小值。

【练习 6-2】【求多元函数的极值-拉格朗日乘数法】

8. 造一容积为 V 形状为圆柱体的煤气罐, 已知其顶部和侧壁每单位面积的造价分别是底部每单位面积造价的 2 倍和 3 倍, 问如何设计, 方能使其造价最低?

解: 设圆柱体的底圆半径为 r , 高为 h , 底部每单位面积的造价为 k , 则总造价

$$C = 3k\pi r^2 + 6k\pi rh, \text{ 且 } \pi r^2 h = V, \text{ 令 } L = 3k\pi r^2 + 6k\pi rh + \lambda(\pi r^2 h - V),$$

$$\text{由 } \begin{cases} L_r = 6k\pi r + 6k\pi h + 2\lambda\pi r h = 0 \\ L_h = 6k\pi r + \lambda\pi r^2 = 0 \\ L_\lambda = \pi r^2 h - V = 0 \end{cases} \quad \text{得 } r = h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

由于实际问题的最小值必定存在, 因此当煤气罐的底圆半径与高都取为 $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ 时, 其造价最低。

9. 利用拉格朗日乘数法, 在曲面 $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ 上求一点, 使它到点 $(1, 1, 0)$ 的距离最短, 并求最短距离.

解: 曲面 $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ 上点 (x, y, z) 到点 $(1, 1, 0)$ 的距离平方 $d^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2$

令 $L = (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2z^2 - 1)$

$$\text{由} \begin{cases} L_x = 2(x-1) + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2(y-1) + 2\lambda y = 0 \\ L_z = 2z + 4\lambda z = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - 2z^2 - 1 = 0 \end{cases}, \text{得驻点 } M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), M_3\left(2, 2, \sqrt{\frac{7}{2}}\right) \text{ 且}$$

$$d(M_1) = \sqrt{2} - 1 \quad d(M_2) = \sqrt{2} + 1 \quad d(M_3) = \sqrt{\frac{11}{2}},$$

可知 $d_{\min} = d(M_1) = \sqrt{2} - 1$, 所以曲面上点 $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ 到点 $(1, 1, 0)$ 的距离最短, 最短距离

为 $\sqrt{2} - 1$.

10. 在平面 xoy 面上求一点, 使它到 $x=0, y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线的距离平方和最小.

解: 设 (x, y) 为 xoy 面上一点, 则此点到 $x=0$ 的距离为 $|y|$, 到 $y=0$ 的距离为 $|x|$, 到 $x+2y-16=0$ 的距

离为 $\frac{|x+2y-16|}{\sqrt{5}}$, 故目标函数为 $z = x^2 + y^2 + \frac{1}{5}(x+2y-16)^2$

$$\text{由} \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \frac{2}{5}(x+2y-16) = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \frac{4}{5}(x+2y-16) = 0 \end{cases} \text{得唯一驻点 } \left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right), \text{由问题的实际意义, 可知 } \left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right) \text{ 为所求.}$$

11. 将 π 分成三个正数的和, 使它们的正弦值之和取最大值.

解: 本题求 $u = \sin x + \sin y + \sin z$ 在条件 $x + y + z = \pi, x > 0, y > 0, z > 0$ 下的极大值.

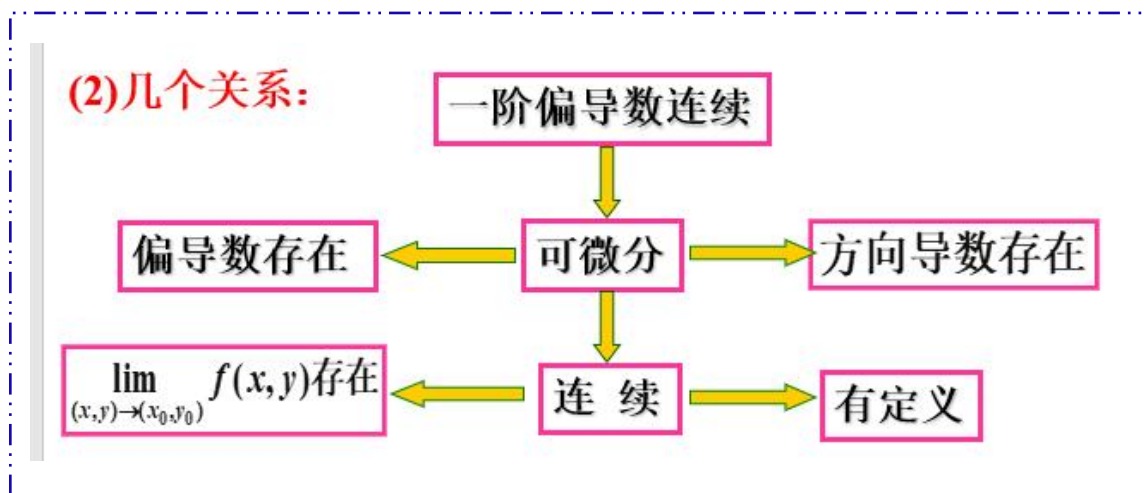
令 $L = \sin x + \sin y + \sin z + \lambda(x + y + z - \pi)$

$$\text{由} \begin{cases} L_x = \cos x + \lambda = 0 \\ L_y = \cos y + \lambda = 0 \\ L_z = \cos z + \lambda = 0 \\ L_\lambda = x + y + z - \pi = 0 \end{cases} \text{得驻点 } \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \text{且 } u\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

由于连续函数 u 在平面 $x + y + z = \pi$ 位于第一卦限内部分的边界上取值为零, 故最大值在第一卦限内取得, 所

以 $\max u = u\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$. 因此应把 π 分成三个相等的正数, 这时它们的正弦值之和取最大值.

七、几个概念的关系



7. 【多元函数微分学的几个关系】

【例 7】1. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处具有偏导数是它在该点存在全微分的 (A) .

(A) 必要而非充分条件 (B) 充分而非必要条件 (C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

【练习 7】【多元函数微分学的几个关系】

2. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续是它在该点偏导数存在的 (D) .

(A) 必要而非充分条件 (B) 充分而非必要条件 (C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

3. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的二阶偏导数 $f_{xy}(x, y)$ 及 $f_{yx}(x, y)$ 都存在, 则 $f_{xy}(x, y)$ 及 $f_{yx}(x, y)$ 在点 (x, y) 处连续是 $f_{xy} = f_{yx}$ 的 (A) .

(A) 充分而非必要条件 (B) 必要而非充分条件 (C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

4. $z_x(x_0, y_0) = 0$ 和 $z_y(x_0, y_0) = 0$ 是函数 $z = z(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极大值或极小值的 (D) .

(A) 必要条件但非充分条件 (B) 充分条件但非必要条件 (C) 充要条件 (D) 既非必要条件也非充分条件

5. 设函数 $f(x, y)$ 在 (x, y) 不连续, 则在点 (x, y) 处 (B) .

(A) 偏导数一定不存在 (B) 全微分一定不存在 (C) 至少有一个方向的方向导数不存在 (D) 以上皆不对

6. 设二元函数 $z = f(x, y)$, 且 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 存在, 则 (C) .

(A) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 一定连续 (B) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 一定不连续

(C) $f(x, x_0)$ 在 x_0 连续, $f(x_0, y)$ 在 y_0 连续 (D) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微

7. 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的全微分存在, 则 (A) .

(A) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续 (B) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 不一定连续

(C) $f'_x(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续 (D) $f'_y(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续