

第八章 向量代数与空间解析几何

一、求单位向量、向量的模、方向角、投影

1. 【求投影】

【例 1】1. 已知 $|r| = 4$, r 与轴 μ 的夹角是 60° , 求 $\text{Pr } j_\mu r$.

解: 根据投影公式 $\text{Pr } j_\mu r = |r| \cos(\hat{r}, \hat{\mu}) = 2$

2. 求向量 $a = \{4, -3, 4\}$ 在向量 $b = \{2, 2, 1\}$ 上的投影.

解: 根据公式 $\text{Pr } j_b a = |a| \cos(\hat{a}, \hat{b}) = |a| \frac{a \cdot b}{|a| \times |b|} = \frac{a \cdot b}{|b|} = 2$.

【练习 1】【求投影】

3. 设向量 $\vec{a} = \{3, -6, -1\}$, $\vec{b} = \{1, 4, -5\}$, $\vec{c} = \{3, -4, 12\}$, 则向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 在 $\vec{c}$ 上的投影为_____.

【答案】 -4

二、求数量积、向量积、及两向量垂直与平行的相关问题

2. 【求数量积问题】

【例 2-1】-数量积

1. 已知空间三点 $M(1, 1, 1)$ 、 $A(2, 2, 1)$ 和 $B(2, 1, 2)$, 求 $\angle AMB$ 是(C).

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) π

2. 设向量 $a = \{x, 3, 2\}$, $b = \{-1, y, 4\}$, 若 $a \parallel b$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

答. -0.5, 6

3. 平面 $kx + y - 2z = 3$ 与平面 $2x + 4y + 3z - 5 = 0$ 垂直, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$

答. 1

【练习 2】【求数量积问题】

4. 向量 a 与 b 的数量积 $a \cdot b =$ (C).

- (A) $|a| \text{Pr } j_b a$ (B) $a \text{Pr } j_b a$ (C) $|a| \text{Pr } j_a b$ (D) $|b| \text{Pr } j_a b$

5. 已知向量 $\vec{a} = \{3, 5, -4\}$, $\vec{b} = \{2, 1, 8\}$, 并且向量 $\lambda \vec{a} + \vec{b}$ 与 OZ 轴垂直, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

答. $\{-10, -10, 5\}$

6. 若直线 $\frac{x}{3} = \frac{y}{k} = \frac{z}{-\frac{1}{2}}$ 与平面 $2x - 9y + 3z - 10 = 0$ 平行, 则 k 等于 (C).

- (A) $\frac{8}{9}$ (B) -1 (C) 1 (D) 2

7. 若平面 $3x + ky - 3z = 9$ 与平面 $2x + 3y + 3 = 0$ 垂直, 则 k 等于 (C).

- (A) 2 (B) -2 (C) 1 (D) 0

8. 求两平面 $x + 2y - z - 3 = 0$ 和 $2x + y + z + 5 = 0$ 的夹角是: (C).

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) π

【例 2-2】-向量积

9. 设 $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, 求 $\vec{a} \times \vec{b}$ 是 (D).

- (A) $-\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ (B) $-\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ (C) $-\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ (D) $3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$

10. 设 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(3, 0, 2), B(5, 3, 1), C(0, -1, 3)$, 求三角形的面积是 (A).

- (A) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ (B) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 3

【练习 3】【求向量积问题】

11. 设向量 $a \neq 0, b \neq 0$, 则下面结论正确的是 (C).

- (A) $a \times b = 0$ 是 $a \perp b$ 的充要条件 (B) $a \cdot b = 0$ 是 $a \parallel b$ 的充要条件
(C) a 与 b 的对应坐标成比例是 $a \parallel b$ 的充要条件 (D) 若 $a = \lambda b$ (λ 是实数), 则 $a \cdot b = 0$

12. 设 $a = \{1, 2, -1\}, b = \{1, 1, -2\}$, 则 $a \times b =$ _____.

答. $-3i + j - k$.

13. 已知 $\vec{OA} = i + j, \vec{OB} = j + 2k$, 则 $\vec{OA} \times \vec{OB} =$ _____.

答. $2i - 2j + k$

三、求平面方程和空间直线方程(解答题)

4. 【求平面方程】

【例 4】-求平面方程

1. 求过点 $A(2, 0, -3)$ 且与直线 $l: \begin{cases} x - 2y + 4z - 7 = 0 \\ 3x + 5y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

解: 由题意, 所求平面的法向量可取已知直线的方向向量, 即

$$n = s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -16i + 14j + 11k$$

故所求平面方程 $-16(x-2) + 14(y-0) + 11(z+3) = 0$ 即 $16x - 14y - 11z - 65 = 0$

2. 点 $(2, -1, 1)$ 到平面 $x + 3y - z + 1 = 0$ 的距离为_____. 答. $\frac{1}{\sqrt{11}}$

3. 求两平面 $x + 2y - z - 3 = 0$ 和 $2x + y + z + 5 = 0$ 的夹角是: (C).

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) π

【练习4】【求平面方程】

4. 求平行于 z 轴, 且过点 $M_1(1, 0, 1)$ 和 $M_2(2, -1, 1)$ 的平面方程. 是 (D).

- (A) $2x + 3y + 5 = 0$ (B) $x - y + 1 = 0$ (C) $x + y + 1 = 0$ (D) $x + y - 1 = 0$

5. 求两平面 $\Pi_1: x - y + 2z - 3 = 0$ 和 $\Pi_2: 2x + y + z - 6 = 0$ 的夹角.

解 两个已知平面的法向量分别为: $n_1 = \{1, -1, 2\}, n_2 = \{2, 1, 1\}$,

$$\cos \theta = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|} = \frac{|1 \times 2 + (-1) \times 1 + 2 \times 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}.$$

因此, 所求夹角为 $\theta = \frac{\pi}{3}$.

6. 求过三点 $A(0, 4, -5), B(-1, -2, 2), C(4, 2, 1)$ 的平面方程.

解: $\overrightarrow{AB} = \{-1, -6, 7\}, \quad \overrightarrow{AC} = \{4, -2, 6\}$

$$\text{所求平面法向量为 } \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -6 & 7 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -2\{11, -17, -13\}$$

故平面方程为 $11x - 17y - 13z + 3 = 0$

5. 【求空间直线方程】

【例5】-求空间直线方程

7. 求过点 $M(1, 1, -1)$ 且与直线 $L: \begin{cases} 2x - 3y + z - 6 = 0, \\ 4x - 2y + 3z + 9 = 0 \end{cases}$ 平行的直线的方程.

解 直线 L 的方向向量为 $s = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -7\vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k}$.

故所求直线的方程为 $\frac{x-1}{-7} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{8}$

8. 求点 $M(2, -1, 10)$ 到直线 $L: \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$ 的距离是 (A).

- (A) $\sqrt{138}$ (B) $\sqrt{118}$ (C) $\sqrt{158}$ (D) 1

9. 求两平面 $x+2y-z-3=0$ 和 $2x+y+z+5=0$ 的夹角是: (C).

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) π

【练习5】【求空间直线方程】

10. 求经过 $P_0(4,2,-3)$, 与平面 $\pi: x+y+z-10=0$ 平行且与直线 $l_1: \begin{cases} x+2y-z-5=0 \\ z-10=0 \end{cases}$ 垂直的直线方程.

解: π 的法向量为 $\vec{n} = \{1,1,1\}$, l_1 的方向向量为 $\vec{S}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{2,-1,0\}$

所求直线方向向量为 $\vec{S} = \vec{n} \times \vec{S}_1 = \{1,2,-3\}$, 从而所求直线方程为 $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-3}$

11. 设有直线 $l: \begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$, 且有平面 $\pi: 4x-2y+z=0$. 则直线 l (B).

- (A) 平行平面 π (B) 在平面 π 上 (C) 垂直平面 π (D) 与平面 π 斜交

12. 直线 $L: \begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 与平面 $\Pi: x-y-z+1=0$ 的位置关系是 (A).

- (A) 平行 (B) 垂直 (C) 斜交 (D) 直线在平面上

13. 设有直线 $l: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4}$, 且有平面 $\pi: x+y+z=3$, 则直线 l (B).

- (A) 平行平面 π (B) 在平面 π 上 (C) 垂直平面 π (D) 与平面 π 斜交

四、空间曲面、空间曲线

6. 【求旋转曲面或判断方程的图形】

【例6】1. 将 xoz 坐标面上的抛物线 $z^2 = 5x$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为_____.

答. $y^2 + z^2 = 5x$

2. 方程 $x^2 + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = -1$ 是 (B).

- (A) 球面 (B) 双叶双曲面 (C) 椭球面 (D) 双曲抛物面

【练习6】【求旋转曲面或判断方程的图形】

3. 由 xoy 坐标面上的曲线 $5x^2 + 3y^2 = 8$ 绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面的方程为_____.

答. $5(x^2 + z^2) + 3y^2 = 8$

4. XOY 平面上的曲线 $x^2 - 4y^2 = 9$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转曲面方程为___. 答. $x^2 + z^2 - 4y^2 = 9$

5. 曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是 (B).

(A) zox 平面上曲线 $z = x$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面 (B) zoy 平面上曲线 $z = |y|$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面

(C) zox 平面上曲线 $z = x$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面 (D) zoy 平面上曲线 $z = |y|$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面

6. 旋转曲面 $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ 是 (C).

(A) xoy 平面上的双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 绕 y 轴旋转而成 (B) xoz 平面上的双曲线 $x^2 - z^2 = 1$ 绕 z 轴旋转而成

(C) xoy 平面上的双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 绕 x 轴旋转而成 (D) xoy 平面上的圆 $x^2 + y^2 = 1$ 绕 x 轴旋转而成

7. 空间曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 - 2, \\ z = 5 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影方程为 (C).

(A) $x^2 + y^2 = 7$ (B) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ z = 5 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ z = 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} z = x^2 + y^2 - 2 \\ z = 0 \end{cases}$

8. 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $x^2 + y^2 = 2az (a > 0)$ 的交线是 (C).

(A) 抛物线 (B) 双曲线 (C) 圆 (D) 椭圆

9. 二次曲面 $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 被平面 $y = h$ 截得的截痕是 (A).

(A) 抛物线 (B) 双曲线 (C) 椭圆 (D) 直线

10. 方程 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ z = y \end{cases}$ 在空间解析几何中表示 (B).

(A) 椭圆柱面 (B) 椭圆曲线 (C) 两平行平面 (D) 两平行直线