

第七章 微分方程

一、判断微分方程的阶数或通解独立常数的个数

【知识 1】 1. 微分方程的阶: 微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数.

2. 通解: n 阶微分方程的含有 n 个相互独立的任意常数的解.

【例 1】 (1) 微分方程 $x(y')^2 - 3y' + 4x = 0$ 的阶数是 (C) .

(A) 4 阶

(B) 3 阶

(C) 1 阶

(D) 2 阶

(2) 是微分方程的解并且独立的常数个数与_____相等的为方程的通解.

答: 方程的阶数

【练习 1】

1. 微分方程 $y' + \sin(xy)(y')^2 - y + 5x = 0$ 是 (A) 微分方程.

(A) 一阶

(B) 二阶

(C) 可分离变量的

(D) 一阶线性

2. 微分方程 $(y'')^3 + (y')^2 + xy^4 = \sin x$ 的阶数为 (B) .

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

3. 微分方程 $(y')^2 + y'(y'')^3 + xy^4 = 0$ 的阶数为 (B) .

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

二、求可分离变量的微分方程的解

【知识 2】 可分离变量的微分方程

形如 $\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$, 两边积分 $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$.

【例 2】 求 $(1 + 2y)xdx + (1 + x^2)dy = 0$ 的通解.

解 $\frac{xdx}{(1+x^2)} = -\frac{dy}{(1+2y)}$, $(1+x^2)(1+2y) = C$

【练习 2】

1. 解微分方程 $y' = e^{2x-y}$, $y|_{x=0} = 0$.

解: $e^y dy = e^{2x} dx$, 两边积分: $\int e^y dy = \int e^{2x} dx$, $e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

即 $y = \ln(\frac{1}{2}e^{2x} + C)$, 将条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入上式得 $C = \frac{1}{2}$

故所求的解为 $y = \ln(\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2})$

2. 求微分方程 $y \ln x dx - x \ln y dy = 0$ 的通解.

解: 分离变量得 $\frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln y}{y} dy$

两边积分, 得 $(\ln x)^2 - (\ln y)^2 = C$ 为方程的通解

3. 求微分方程初值问题 $\begin{cases} (1+e^x)yy' = e^x \\ y|_{x=1} = 1 \end{cases}$ 的解.

解: $y dy = \frac{e^x}{1+e^x} dx$

$$\frac{1}{2} y^2 = \ln(1+e^x) + C$$

由初始条件求得: $C = \frac{1}{2} - \ln(1+e)$

故原初始问题的解为

$$\frac{1}{2} y^2 = \ln(1+e^x) + \left[\frac{1}{2} - \ln(1+e) \right]$$

三、求齐次方程的解

【知识 3】齐次方程

形如 $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, 解法: 换元解法: 令 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = ux$, 则 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

【例 3】求微分方程 $x(\ln x - \ln y)dy - ydx = 0$ 的通解.

解: 将方程化为 $\ln \frac{y}{x} dy + \frac{y}{x} dx = 0$

令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $y = ux, \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ 。

于是, 原方程变为 $\frac{\ln u}{u(\ln u + 1)} du = -\frac{dx}{x}$

两边积分, 得 $\ln u - \ln(\ln u + 1) = -\ln x + \ln C$

用 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式, 得通解为 $y = C(\ln \frac{y}{x} + 1)$

【练习 3】

1. 求方程 $xy \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ 满足初始条件 $y|_{x=e} = 2e$ 的特解.

解: 将方程化为 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$,

令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $y = ux, \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

原方程化为 $udu = \frac{dx}{x}$

两边积分, 得 $u^2 = 2\ln x + C$, 代回 $u = \frac{y}{x}$ 得 $(\frac{y}{x})^2 = 2\ln x + C$

代入初始条件可解得 $C=2$ 于是所求特解为 $(\frac{y}{x})^2 = 2(\ln x + 1)$

2. 求微分方程 $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$ 的通解.

解: 令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

于是, 原方程变为 $u + x \frac{du}{dx} = u(1 + \ln u)$, 即 $x \frac{du}{dx} = u \ln u$

分离变量得 $\frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}$

两边积分, 得 $\ln \ln u = \ln x + \ln C$ 即 $u = C_1 e^x$ ($C_1 = e^C$)

用 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式, 得通解为 $y = C_1 x e^x$

3. 求方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解.

解 原方程可写成 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1 - (\frac{y}{x})^2}$, 令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$.

于是, 原方程变为 $u + x \frac{du}{dx} = \frac{u}{1 - u^2}$.

分离变量, 得 $\frac{u}{1 - u^2} du = \frac{dx}{x}$,

两边积分, 得 $-\frac{1}{2u^2} - \ln u = \ln x + c_1$,

即 $ux = ce^{-\frac{1}{2u^2}}$.

用 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式, 得通解为 $y - ce^{-\frac{x^2}{2y^2}} = 0$

由初始条件 $y|_{x=0} = 1$, 得 $c = 1$ 。因此, 原方程的特解为 $y - e^{-\frac{x^2}{2y^2}} = 0$

四、求一阶线性非齐次微分方程的解

【知识 4】一阶线性非齐次微分方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

其通解为 (常数变易公式): $y = e^{-\int P(x)dx} [\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C]$

【例 4】求 $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ 的通解.

解: 方程是一阶线性微分方程

$$\begin{aligned} \text{则 } y &= e^{-\int 2xdx} [\int xe^{-x^2} e^{\int 2xdx} dx + C] = e^{-x^2} [\int x dx + C] \\ &= e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + C \right) \end{aligned}$$

【练习 4】

1. 求微分方程 $x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0$ 满足 $y|_{x=e} = 1$ 的特解.

解: 将方程改写为 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x \ln x} y = \frac{1}{x}$ 是一阶线性微分方程

$$\text{则 } y = e^{-\int \frac{1}{x \ln x} dx} [\int \frac{1}{x} e^{\int \frac{1}{x \ln x} dx} dx + C] = \frac{1}{\ln x} \left[\frac{1}{2} \ln^2 x + C \right]$$

代入初始条件, 得 $C = \frac{1}{2}$

$$\text{故所求特解为 } y = \frac{1}{\ln x} \left[\frac{1}{2} \ln^2 x + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{\ln x} \right)$$

2. 求一曲线的方程, 这曲线通过原点, 并且它在点 (x, y) 处的切线斜率等于 $2x + 3y$.

解: $\begin{cases} y' = 2x + 3y \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $y' - 3y = 2x$ 是一阶线性方程,

$$\begin{aligned} \text{通解 } y &= e^{-\int 3dx} [\int 2xe^{\int 3dx} dx + c] = e^{-3x} [\int 2xe^{3x} dx + c] = e^{-3x} [\int 2xe^{-3x} dx + c] \\ &= e^{-3x} \left[-\frac{1}{3} 2xe^{-3x} - \frac{2}{9} e^{-3x} + c \right] \end{aligned}$$

由 $y(0) = 0$, 求得 $c = -\frac{2}{9}$, 曲线方程为 $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{9} + \frac{2}{9}e^{3x}$

3. 设连续函数 $y(x)$ 满足方程 $y(x) = \int_0^x y(t)dt + e^x$, 求 $y(x)$.

解: 方程两边关于 x 求导, 得 $y'(x) = y(x) + e^x$, 为一阶线性非齐次微分方程。

利用公式得通解为

$$y = e^{\int dx} \left(\int e^x e^{-\int dx} dx + C \right) = e^x \left(\int dx + C \right) = e^x (x + C)。$$

由 $y|_{x=0} = 1$, 得 $C = 1$,

故所求曲线的方程为 $y = e^x(x+1)$ 。

五、判断一阶微分方程的类型

【知识 5】

1. 可分离变量型 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$;
2. 齐次微分方程形如 $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$
3. 一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$
4. 伯努利方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$

【例 5】方程 $(y - \ln x)dx + xdy = 0$ 是 (C)。

(A) 可分离变量的微分方程

(B) 齐次方程

(C) 一阶非齐次线性微分方程

(D) 一阶齐次线性微分方程

【练习 5】

1. $y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0$ 的方程类型是 (A)。

(A) 齐次方程

(B) 一阶线性微分方程

(C) 可分离变量的微分方程

(D) 全微分方程

2. 微分方程 $(e^{x+y} - e^x)dx + (e^{x+y} + e^y)dy = 0$ 为 (D)。

(A) 齐次方程

(B) 伯努利方程

(C) 一阶线性非齐次方程

(D) 可分离变量的微分方程

3. 下列方程中, 是一阶线性微分方程的为 (C)。

(A) $x(y')^2 - 2yy' + x = 0$

(B) $xy + 2yy' - x = 0$

(C) $xy' + x^2y = x + 3$

(D) $(7x - 6y)dx + (x + y)dy = 0$

六、求可降解的高阶微分方程的解

【知识 6】可降阶型

1. $y^{(n)} = f(x)$ 型;
2. $y'' = f(x, y')$ 型, 解法: 设 $y' = p(x)$, 方程化为 $p' = f(x, p)$;
3. $y'' = f(y, y')$ 型, 解法: 设 $y' = p(y)$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 方程化为 $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$.

【例 6】(1) 设 $y'' = \sin x$, 则 $y =$ _____.

答. $y = -\sin x + C_1x + C_2$

(2) 微分方程 $xy'' - y' = 0$ 满足条件 $y'(1) = 1, y(1) = \frac{1}{2}$ 的解是 (B)。

(A) $y = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}$

(B) $y = \frac{x^2}{2}$

$$(C) y = x^2 - \frac{1}{2}$$

$$(D) y = -x^2 + \frac{1}{2}$$

(3) 微分方程 $y'' - 2yy'^3 = 0$ 满足条件 $y'(0) = -1, y(0) = 1$ 的解是 (C) .

$$(A) \frac{y^3}{3} = x + \frac{1}{3}$$

$$(B) \frac{x^3}{3} = y - 1$$

$$(C) \frac{y^3}{3} = -x + \frac{1}{3}$$

$$(D) \frac{x^3}{3} = -y + 1$$

【练习 6】

1. 求 $y'' = x$ 的经过点 $M(0, 1)$ 且在此点与直线 $y = \frac{x}{2} + 1$ 相切的积分曲线为_____.

解: 由 $y'' = x$ 得 $y' = \frac{x^2}{2} + C_1$, (3 分)

由 $y'(0) = \frac{1}{2}$ 得 $C_1 = \frac{1}{2}$ 所以, $y' = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$,

从而 $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x + C_2$ 又有 $y(0) = 1$, 可得 $C_2 = 1$

故所求积分曲线为 $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x + 1$

2. 求微分方程 $(1+x^2)y'' = 2xy$ 满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 3$ 的特解.

解 设 $y' = p$, 则 $y'' = p'$, 代入方程, 得 $(1+x^2)p' = 2xp$ 。

分离变量, 得 $\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2} dx$,

两边积分, 得 $\ln p = \ln(1+x^2) + \ln c_1$ 。

整理之, 得 $p = c_1(1+x^2)$ 。

再以 y' 代换 p , 得 $y' = c_1(1+x^2)$ 。

两边积分, 得通解为 $y = \int c_1(1+x^2)dx + c_2 = c_1(x + \frac{x^3}{3}) + c_2$ 。

代入初始条件, 得 $c_1 = 3, c_2 = 1$. 故所求方程的特解为 $y = x^3 + 3x + 1$ 。

3. 求 $y^2 y'' + 1 = 0$ 的积分曲线方程, 使积分曲线通过点 $(0, \frac{1}{2})$, 且在该点出的斜率为 2.

解: 依题意, 有
$$\begin{cases} y^2 y'' + 1 = 0 \\ y|_{x=0} = \frac{1}{2}, y'|_{x=0} = 2 \end{cases} .$$

令 $p = y'$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 原方程化为 $y^2 p \frac{dp}{dy} = -y^{-2}$

解得 $\frac{p^2}{2} = \frac{1}{y} + C_1$, 代入初始条件, 解得 $C_1 = 0$

故 $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2}}$, 解得 $\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2}x + C_2$

代入初始条件, 解得 $C_2 = \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}$

所求曲线方程为 $y^3 = \frac{1}{2}(3x + \frac{1}{2})^2$

七、线性方程的解的结构

【知识 7】

1. 二阶线性齐次微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ①

(1) 若 y_1 和 y_2 是齐次①的两个解, 则 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 也是齐次①的解.

(2) 若 y_1 和 y_2 是齐次①的两个线性无关的特解, 则齐次①的通解为 $y = C_1y_1 + C_2y_2$.

2. 二阶线性非齐次微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) (f(x) \neq 0)$ ②

(1) 若 y_1 和 y_2 是非齐次②的两个解, 则 $y_1 - y_2$ 其相应齐次①的解.

(2) 若 Y 是齐次①的通解, y^* 是齐次②的特解, 则非齐次②的通解为 $y = Y + y^*$.

【例 7】设 y_1, y_2 是二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个解, 则下列说法不正确的是 (C).

(A) $y_1 + y_2$ 是此方程的一个解

(B) $y_1 - y_2$ 是此方程的一个解

(C) $c_1y_1 + c_2y_2$ 是此方程的通解 (c_1, c_2 为任意常数)

(D) 若 y_1, y_2 线性无关, 则 $c_1y_1 + c_2y_2$ 是此方程的通解 (c_1, c_2 为任意常数)

【练习 7】

1. 若 y_1, y_2, y_3 是二阶非齐次线性微分方程 $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$ 的线性无关的特解,

C_1, C_2 为任意常数, 则该方程的通解是 (A)

A. $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_1$ B. $C_1(y_1 - y_2) + C_2(y_2 - y_3)$

C. $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$ D. $C_1y_1 + C_2y_2 + y_2 - y_3$

2. 若 $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}, y_3 = x + e^x$ 是二阶非齐次线性微分方程 $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$ 的解,

C_1, C_2 为任意常数, 则该方程的通解是 (D)

- A. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x$ B. $y = C_1 (x + e^x) + C_2 e^{-x} + x$
 C. $y = C_1 (x + e^x) + C_2 e^x + e^{-x}$ D. $y = C_1 x + C_2 (e^x - e^{-x}) + e^x$

3. 设方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的三个解为 $y_1 = x, y_2 = e^x, y_3 = e^{2x}$, 求此方程满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 3$ 的解(D)

- A. $y = e^x + 2e^{2x}$ B. $y = -e^x - 2e^{2x}$ C. $y = e^x + 2e^{2x}$ D. $y = -e^x + 2e^{2x}$

八、求二阶常系数齐次微分方程的解

【知识 8】 二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$

解法	列出特征方程: $r^2 + pr + q = 0$, 求得特征根 r_1, r_2	
	不等实根 r_1, r_2	通解 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
	相等实根 $r_1 = r_2$	通解 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}$
	一对共轭复根 $\alpha \pm i\beta$	通解 $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

【例 8】 (1) 微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解为_____.

答案: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

(2) 在下列微分方程中, 其通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ 的是 (C).

- (A) $y'' - y' = 0$ (B) $y'' + y' = 0$ (C) $y'' + y = 0$ (D) $y'' - y = 0$

(3) 若方程 $y'' + py' + qy = 0$ (p, q 均为实常数) 有特解 $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$, 则 p 等于____,

q 等于_____.

答. $p = 0$ $q = -1$

【练习 8】

1. 求微分方程 $y'' - 2y' + 2y = 0$ 的一条积分曲线, 使其在点 $(0, 1)$ 处有水平切线.

解: 方程的通解为

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

由已知得初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$, 代入上式得

$$C_1 = 1, C_2 = -1$$

故所求积分曲线得方程为

$$y = e^x (\cos x - \sin x)$$

2. 试建立一个二阶常系数齐次线性微分方程, 已知其特征方程的一个特征根为 $r_1 = 3 + 2i$, 并求出该方程的通解.

解: 易知, 特征方程的另一个根为 $r_2 = 3 - 2i$

$$\text{因此特征方程为 } r^2 - 6r + 13 = 0$$

对应的常系数齐次线性微分方程为 $y'' - 6y' + 13y = 0$

$$\text{通解为 } y = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

3. 求微分方程的 $y^{(4)} - 2y''' - 2y'' = 0$ 的通解.

解 微分方程的特征方程为 $r^4 - 2r^3 + 2r^2 = 0$.

易知, 其特征根为 $r_1 = r_2 = 0, r_{3,4} = 1 \pm i$.

于是, 微分方程的通解为

$$y = c_1 + c_2 x + e^x (c_3 \cos x + c_4 \sin x).$$

九、求二阶常系数非齐次微分方程的解

【知识 9】

二阶常系数非齐次线性微分方程	形如 $y'' + py' + qy = f(x)$	
	$f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$	特解为 $y^* = x^k Q_m(x)e^{\lambda x}$, k 按 λ 不是特征根, 是单根, 是重根, 分别取 0, 1, 2。
	$f(x) = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x)$	特解 $y^* = x^k e^{\alpha x} (Q_l(x) \cos \beta x + R_l(x) \sin \beta x)$, 其中 k 按 $\alpha \pm i\beta$ 不是特征根, 是特征根分别取 0, 1; $l = \max\{m, n\}$ 。

【例 8】(1) 已知 $y = 2x^2 - 7$ 是微分方程 $y'' + y = 2x^2 - 3$ 的一个特解, 则其通解为 (A)。

(A) $x = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2x^2 - 7$ (B) $x = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 2x^2 - 7$

$$(C) x = c_1 + c_2 e^{-x} + 2x^2 - 7 \quad (D) x = (c_1 + c_2 x)e^x + 2x^2 - 7$$

(2) 微分方程 $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$ 的特解形式为 (C) .

$$(A) (Ax+B)e^{2x} \quad (B) x(Ax+B)e^{2x} \quad (C) x^2(Ax+B)e^{2x} \quad (D) Ax^3e^{2x}$$

(3) 若 $f(x)$ 是方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = \sin 2x$ 的一个特解, 则方程的通解为 (D) .

$$(A) y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} \quad (B) y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + f(x)$$

$$(C) y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \quad (D) y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + f(x)$$

【练习9】

1. 求微分方程 $y'' - y' - 6y = 3x^2 + x + 1$ 的一个特解.

解 该方程所对应的线性齐次微分方程为 $y'' - y' - 6y = 0$.

其特征方程为 $r^2 - r - 6 = 0$

其特征根为 $r_1 = 3, r_2 = 2$

由于 $\lambda = 0$ 不是特征方程的根, 所以应设特解为 $y^* = xQ_m(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2$

于是有 $y^{*'} = 2b_0 x + b_1, \quad y^{*''} = 2b_0$

将 $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ 代入所给方程, 得 $2b_0 - 2b_0 x - b_1 - 6(b_0 x^2 + b_1 x + b_2) = 3x^2 + x + 1$

$$\begin{cases} -6b_0 = 3, \\ -2b_0 - 6b_1 = 1, \\ 2b_0 - b_1 - 6b_2 = 1. \end{cases}$$

比较两边 x 同次幂的系数, 得

$$\text{解之, 得 } b_0 = -\frac{1}{2}, b_1 = 0, b_2 = -\frac{1}{3}.$$

于是, 所求的一个特解为 $y^* = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}$

2. 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = 3xe^{2x}$ 的一个通解.

解 该方程所对应的线性齐次微分方程为 $y'' - 5y' + 6y = 0$

其特征方程为 $r^2 - 5r + 6 = 0$.

不难求出其特征根为 $r_1 = 2, r_2 = 3$.

于是, 该方程所对应的齐次微分方程的通解为 $Y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$.

由于 $\lambda = 2$ 是特征方程的单根, 所以应设特解为 $y^* = x(b_0x + b_1)e^{2x}$

求出 y^* 的一阶、二阶导数为 $y^{*'} = (2b_0x^2 + 2b_0x + 2b_1x + b_1)e^{2x}$

$$y^{*''} = (4b_0x^2 + 6b_0x + 4b_1x + 2b_0 + 4b_1)e^{2x}$$

并将 $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ 代入所给方程, 整理之, 得

$$-2b_0x + 2b_0 - b_1 = 3x$$

比较两边 x 同次幂的系数, 得
$$\begin{cases} -2b_0 = 3, \\ 2b_0 - b_1 = 0. \end{cases}$$

$$\text{解之, 得 } b_0 = -\frac{3}{2}, b_1 = -3.$$

于是, 所求的一个特解为 $y^* = x\left(-\frac{3}{2}x - 3\right)e^{2x}$

从而所给方程的通解为 $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} - \left(\frac{3}{2}x^2 + 3x\right)e^{2x}$

3. 求方程 $y'' - y = 4xe^x$, $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$ 的特解.

解: 微分方程的特征方程为 $r^2 - 1 = 0$, 其根为 $r_1 = 1, r_2 = -1$,

故对应的齐次方程的通解为 $Y = C_1e^x + C_2e^{-x}$ 。

因为 $f(x) = 4xe^x, \lambda = 1$ 是特征方程的单根,

故原方程的特解设为 $y^* = xe^x(Ax + B)$,

代入原方程得 $e^x(4Ax + 2A + 2B) = 4xe^x$, 比较系数得 $A = 1, B = -1$,

从而 $y^* = xe^x(x - 1)$ 。

因此原方程的通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x(x - 1)$ 。

由 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$, 得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 - 1 = 1 \end{cases}$, 解之得 $C_1 = 1, C_2 = -1$ 。

综上满足初始条件的特解为 $y = e^x - e^{-x} + xe^x(x - 1)$ 。