

第六章 定积分的应用

一、定积分在几何学上的应用

【知识 1】求面积：直角坐标系下和极坐标系下

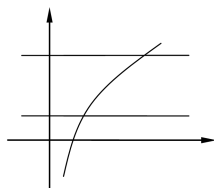
【例 1】(1) 求由曲线 $y = \ln x$ 及直线 $y = 1 + x, x = 1, x = e$ 所围成的平面图形的面积.

解: 解: $s = \int_1^e (1 + x - \ln x) dx = \left(x + \frac{x^2}{2} - x \ln x + x \right) \Big|_1^e = \frac{1}{2}e^2 + e - \frac{5}{2}$

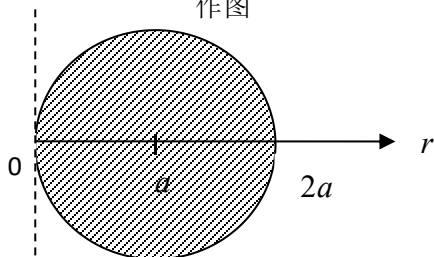
(2) 求由曲线 $y = \ln x$, $y = 0$, $y = \ln a$ 及 $y = \ln b$ 所围图形的面积.

解 所求图形的面积为

$$A = \int_{\ln a}^{\ln b} e^y dy = e^y \Big|_{\ln a}^{\ln b} = b - a.$$

(3) 求由曲线 $r = 2a \cos \theta$ 所围图形的面积解: $\because$

作图



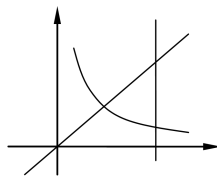
知所求图形区域 D : $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0 < r < 2a \cos \theta \end{cases}$

$$\therefore S_D = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (2a \cos \theta)^2 d\theta = 2a^2 \left(\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi a^2$$

【练习 1】

1. (1) 求两曲线 $y = \frac{1}{x}$, $y = x$ 与 $x = 2$ 所围图形的面积.解 曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与 $y = x$ 的交点为 $(1, 1)$, 所求图形的面积为

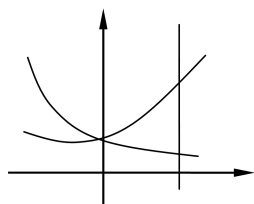
$$A = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{3}{2} - \ln 2$$



(2) 求由曲线 $y = e^x$, $y = e^{-x}$ 及 $x = 1$ 所围图形的面积.

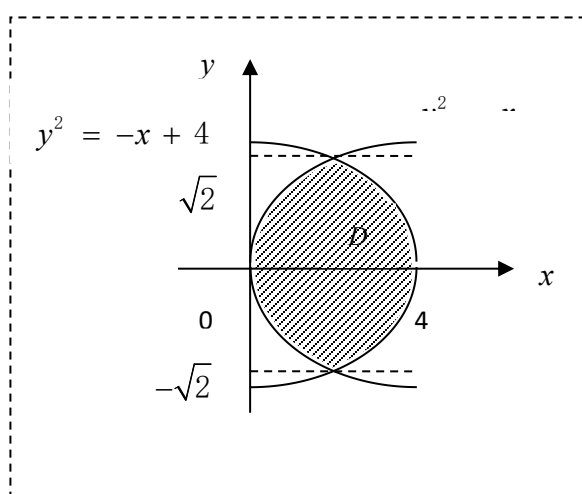
解 所求图形的面积为

$$A = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = e + e^{-1} + 2$$



(3) 求由曲线 $y^2 = x$ 与 $y^2 = -x + 4$ 所围图形的面积

解: 见图

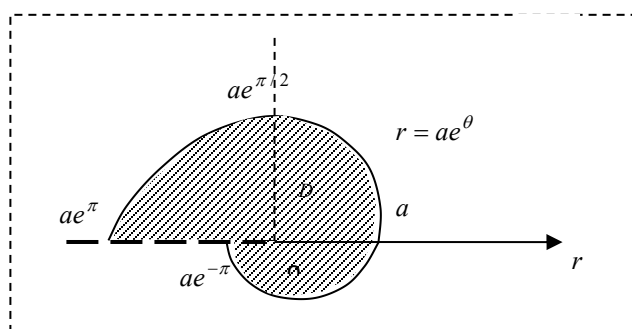


$$\therefore S_D = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - y^2 - y^2) dy = \left(4y - \frac{2}{3} y^3 \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{16}{3} \sqrt{2}$$

(由于图形关于 x 轴对称, 所以也可以解为:

$$S_D = 2 \int_0^{\sqrt{2}} (4 - y^2 - y^2) dy = 2 \left(4y - \frac{2}{3} y^3 \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{16}{3} \sqrt{2})$$

2. 求对数螺线 $\rho = ae^\theta$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) 及射线 $\theta = \pi$ 所围图形的面积



解: $\because$ 所围区域 $D: \begin{cases} -\pi < \theta < \pi \\ 0 < \rho < ae^\theta \end{cases}$

$$\therefore S_D = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (ae^{\theta})^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \times \frac{1}{2} e^{2\theta} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a^2}{4} (e^{2\pi} - e^{-2\pi})$$

3. 求 a 为何值时, 使曲线 $y^2 = ax (a > 0)$ 与 $y = x^2$ 所围成的平面图形的面积为 9.

$$\text{解: } \begin{cases} y^2 = ax, \\ y = x^2, \end{cases} \quad x^4 - ax = 0, \quad x_1 = 0, x_2 = a^{\frac{1}{3}}.$$

$$\therefore s = \int_0^{a^{\frac{1}{3}}} (\sqrt{ax} - x^2) dx$$

$$= \left(\sqrt{a} \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^{a^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{2}{3} a - \frac{a}{3} = \frac{a}{3}.$$

$$\therefore s = 9, \quad \therefore \frac{a}{3} = 9,$$

【知识 2】求体积

1. 绕 x 轴旋转: $V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$; 绕 y 轴旋转: $V = \int_c^d \pi \varphi^2(y) dy$

2. 柱壳法: 绕 x 轴旋转: $V = \int_c^d 2\pi y \varphi(y) dy$; 绕 y 轴旋转: $V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$

【例 2】(1) 求由曲线 $y = \sqrt{x}$ 和 $y = \sqrt[3]{x}$ 所围成的平面图形分别绕 x 轴及绕 y 轴旋转而成的旋体的体积.

$$\text{解: 绕 } x \text{ 轴} \quad V_x = \pi \int_0^1 (x^{\frac{2}{3}} - x) dx = \pi \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{10}$$

$$\text{绕 } y \text{ 轴} \quad V_y = \pi \int_0^1 (y^4 - y^6) dy = \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{2}{35} \pi$$

(2) 求由曲线 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 与 x 轴围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所产生的旋转体体积.

$$\text{解: 平面图形 } D: \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \sin x \end{cases}, \text{ 绕 } y \text{ 轴旋转产生的立体体积: } V = \int_0^{\pi} 2\pi x \sin x dx = 2\pi^2$$

【练习 2】

1. 求由曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x = 0$, $x = 1$ 及 x 轴所成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

$$\text{解: } V = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \pi \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}$$

2. 求由曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$ 及 $x = 2$ 所围成的平面图形的绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

$$\text{解: } V_x = \pi \int_1^2 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 - \frac{1}{x^2} \right] dx = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \pi \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \pi \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right).$$

3. 过原点 O 做曲线 $L: y = e^x$ 的切线, 记切点为 A , 由直线 OA , y 轴和曲线 L 围成的图形记为 D , 求 D 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积。

解: 过原点 O 做曲线 $L: y = e^x$ 的切线, 记切点为 A , 由直线 OA , y 轴和曲线 L 围成的图形记为 D , 求 D 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积。

设切点为 (a, e^a) , 切线斜率为 $y' = e^a$

切线求得 $y - e^a = e^a(x - a)$

切线过原点, 所以 $0 - e^a = e^a(0 - a) \Rightarrow a = 1$, 所以切点为 $(1, e)$,

所求体积为曲线 L 旋转的体积 V_1 减去切线旋转得的体积 V_2

$$V_1 = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$$

$$V = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1) - \frac{\pi}{3}e^2 = \frac{\pi}{6}e^2 - \frac{\pi}{2}$$

【知识 3】求弧长

1. 直角坐标 $L: y = f(x), x \in [a, b], ds = \sqrt{1 + y'^2} dx; s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$

2. 参数方程 $L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta), ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt, s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$

3. 极坐标 $L: r = r(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta; ds = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta; s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$

【例 3】(1) 求曲线 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ 上相应于 $0 \leq x \leq b$ 的一段弧的长度。

$$\text{解 } y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2)$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) = \left[\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \right]^2$$

$$S = \int_0^b \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) dx$$

$$= \frac{1}{2}(e^b - e^{-b}).$$

(2) 求曲线 $\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} - t, \\ y = t^2 + 2, \end{cases}$ 上相应于 $0 \leq t \leq 3$ 的一段弧的长度。

$$\text{解 } x'(t) = t^2 - 1, y'(t) = 2t,$$

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2 = (t^2 + 1)^2$$

$$S = \int_0^3 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_0^3 (t^2 + 1) dt$$

$$= \left(\frac{t^3}{3} + t \right) \Big|_0^3$$

$$= 12.$$

(3) 求曲线 $r = \cos^2 \frac{\theta}{2}$ 上相应于 $\theta \in [0, \pi]$ 的一段弧的长度.

$$\text{解 } r' = -\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2},$$

$$S = \int_0^\pi \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \int_0^\pi \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} (\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2})} d\theta$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^\pi \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 2 \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi = 2.$$

【练习 2】

1. 求曲线 $y = \ln \sin x$ 上相应于 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 的一段弧的长度.

$$\text{解 } y' = \cot x,$$

$$1 + y'^2 = 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \csc x dx$$

$$= \ln |\csc x - \cot x| \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\ln \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

2. 求曲线 $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ 上相应于 $0 \leq t \leq \ln \pi$ 的一段弧的长度.

$$\text{解 } \dot{x} = e^t (\cos t - \sin t), \quad \dot{y} = e^t (\sin t + \cos t)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2e^{2t}$$

$$S = \int_0^{\ln \pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \sqrt{2} \int_0^{\ln \pi} e^t dt = \sqrt{2} e^t \Big|_0^{\ln \pi} = \sqrt{2} (\pi - 1).$$

3. 求曲线 $r = 1 + \cos \theta$ 上相应于 $\theta \in [0, \pi]$ 的一段弧的长度.

$$\text{解 } r' = -\sin \theta,$$

$$S = \int_0^\pi \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\pi} \sqrt{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\theta} d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\
 &= 4 \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} \\
 &= 4.
 \end{aligned}$$

二、定积分在物理学上的应用

【知识 1】 变力沿直线做功；水压力；引力等

【例 1】 (1) 一物体的速度为 $v = \sqrt{1+t} \text{ m/s}$, 求此物体在运动开始后前 10 秒内所经过的路径.

解 $ds = v dt = \sqrt{1+t} dt$,

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{10} \sqrt{1+t} dt \\
 &= \frac{2}{3} (11\sqrt{11} - 1) \approx 23.7 \text{ 米}.
 \end{aligned}$$

(2) 设一质点距原点 x 米时, 受 $F(x) = x^2 + 2x$ 牛顿力的作用, 问质点在 F 作用下, 从 $x=1$ 移动到 $x=3$, 力所做的功有多大?

思路: 当变力沿直线做功, 质点从 x 至 $x+dx$ 段所作功的微元 $dW = F(x)dx$ 。

解: $\because dW = F(x)dx = (x^2 + 2x)dx$

$$\therefore W = \int_1^3 (x^2 + 2x)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_1^3 = \frac{50}{3}$$

【练习 1】

1. 设一质点运动的速度 $v = 0.2e^{-0.04t} \text{ m/s}$, 求该质点从运动的起点到运动完全停止时所经过的路程.

$$\text{解 } S = \int_0^{\infty} V(t)dt = \int_0^{\infty} 0.2e^{-0.04t} dt = -\frac{0.2}{0.04} e^{-0.04t} \Big|_0^{\infty} = 5 \text{ 米}$$

2. 一汽船按 $x = t^2$ 做直线航行, 水的阻力与速度平方成正比 (比例系数为 k), 汽船从静止开始向前航行 2 米, 发动机克服阻力所做的功为 () .D

(A) k (B) $2k$ (C) $4k$ (D) $8k$

3. 水下由一个矩形闸门, 铅直地浸没在水中. 它的宽为 2m, 高为 3m, 水面超过门顶 2m, 则闸门上所受水的压力为 (C) .

(A) 245kN (B) 245N (C) 205.8N (D) 205.8kN