第五章 定积分

一、定积分的概念与性质

【知识 1】和式极限与定积分的关系

【例 1】有定积分的定义知,和式极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=$________.

【答案】$\frac{\pi}{4}$

【练习 1】1. 试将和式的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$ 表示成定积分.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^p+(\frac{2}{n})^p+\cdots+(\frac{n}{n})^p]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^p$

设 $f(x)=x^p$，则用定义求解 $\int_0^1 f(x)dx$ 为：

①、等分 $[0,1]$ 为 n 个小区间：$[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}],\ i=1,2,\cdots n,\quad \Delta x_i=\frac{1}{n}$

②、求和：取区间 $[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$ 上的右端点为 ξ_i，即 $\xi_i=\frac{i}{n}$，作和：$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\times\frac{1}{n}$

③、求极限：$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^p\times\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^p$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^p=\int_0^1 x^p dx$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$ 等于（　）.

(A) $\int_1^2\ln^2 xdx;$　　(B) $2\int_1^2\ln xdx;$

(C) $2\int_1^2\ln(1+x)dx;$　　(D) $\int_1^2\ln^2(1+x)dx.$

应选 B

解：因为原式 $=2\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})\bullet\frac{1}{n}=2\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+x_i)\Delta x_i,$

将区间 $[1,2]$ 等分为个 n 小区间，则 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上取右端点 $x_i=1+\frac{i}{n}$，函数 $f(x)=\ln x$ 在 x_i 的值为 $f(x_i)=\ln(1+\frac{i}{n})$，根据定积分的定义，所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}=2\int_1^2\ln xdx.$$

3. 填空 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}]=$ ________.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}]=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i\pi}{n}}\bullet\frac{1}{n}$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos x}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}|dx=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

【知识 2】定积分的几何意义和对称性奇偶性（“偶倍奇零”）

【例 2】(1) 定积分的几何意义计算定积分 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ 的结果为(D)

A、π　　B、$\frac{\pi}{4}$　　C、$\frac{\pi}{3}$　　D、$\frac{\pi}{2}$

(2) “偶倍奇零”--下列积分中不为 0 的是(C).

(A) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos x}dx$　　(B) $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x+\sin x}{2}dx$

(C) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin x}{1+x^{10}}+\frac{1}{x^2+1})dx$　　(D) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\arcsin x^2dx$

【练习 2】

1. (1) $\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2}dx=($　　$)$. B

(A) 0　　(B) 1　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 2

(2) $\int_{-1}^{0}|3x+1|dx=($　　$)$. A

(A) $\frac{5}{6}$　　(B) $-\frac{5}{6}$　　(C) $-\frac{3}{2}$　　(D) $\frac{3}{2}$

(3) $\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=($　　$)$. D

(A) $2\pi a^2$　　(B) πa^2　　(C) $\frac{1}{2}\pi a^2$　　(D) $\frac{1}{4}\pi a^2$

2. (1) 设 $f(x)=x^3+x$，则定积分 $\int_{-2}^{2}f(x)dx$ 的值等于(　　).A

(A) 0　　(B) 8　　(C) $\int_0^2 f(x)dx$　　(D) $2\int_0^2 f(x)dx$

(2) 下列积分中值为零的是(C).

(A) $\int_{-2}^{1}xdx$　　(B) $\int_{-1}^{1}x\sin xdx$　　(C) $\int_{-1}^{1}x\sin^2 xdx$　　(D) $\int_{-1}^{1}x^2\cos xdx$

(3) $\int_{-1}^{1}x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx=$ ______；（2）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sin x^2\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}dx=$ ________ .

【答案】0,0

3.(1) $\int_{-1}^{1}(x+1+\sqrt{1-x^2})dx=(\quad)$. C

(A) $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}$　　(C) $\frac{\pi}{2}+2$　　(D) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}$

(2) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2\arcsin x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$ ______ ______ ___ .

【答案】$\frac{\pi}{3}$.

(3)计算定积分 $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{4-x^2})^2dx$.

解　原式=$\int_{-1}^{1}(x^2+2x\sqrt{4-x^2}+4-x^2)dx=\int_{-1}^{1}4dx=8.$

【知识 3】【利用定积分的性质比较几个定积分的大小】

【例 3】(1) $\int_0^1 x^2dx$，$\int_0^1 x^3dx$

解：当 $x\in(0,1)$ 时，$x^3<x^2$，即 $x^2-x^3>0$. $\Rightarrow\int_0^1(x^2-x^3)dx>0\Rightarrow\int_0^1 x^2dx>\int_0^1 x^3dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$

解：令 $f(x)=x-\sin x$，则 $f'(x)=1-\cos x\ge 0, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

且仅当 $x=0$ 时，$f'(0)=0$，故在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$f(x)$ 单调增加

$\Rightarrow f(x)=x-\sin x\ge 0=f(0)$, 即 $x\ge\sin x$, 又在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$x\ne\sin x$，即 $f(x)\ne 0$,

$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$

(3) $\int_1^0\ln(1+x)dx$，$\int_1^0\frac{x}{1+x}dx$

解：令 $F(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$，则 $F'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0, x\in(0,1)$.

所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 单调增加，且 $F(0)=0$，故 $F(x)>0, x\in(0,1)$，

所以 $\int_0^1 F(x)dx>0\Rightarrow\int_1^0 F(x)dx<0\Rightarrow\int_1^0\ln(1+x)dx<\int_1^0\frac{x}{1+x}dx$

【练习 3】

1.（2003 数二 11）设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}dx$，则

(A)　$I_1>I_2>1$.　　　　(B)　$1>I_1>I_2$.

(C) $I_2 > I_1 > 1.$ (D) $1 > I_2 > I_1.$ [B]

【分析】 直接计算 I_1, I_2 是困难的，可应用不等式 tanx>x, x>0.

【详解】 因为当 x>0 时，有 tanx>x，于是 $\frac{\tan x}{x} > 1$， $\frac{x}{\tan x} < 1$，从而有 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx > \frac{\pi}{4}$，

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx < \frac{\pi}{4},$$

可见有 $I_1 > I_2$ 且 $I_2 < \frac{\pi}{4}$，可排除(A),(C),(D)，故应选(B).

++

二、变限积分

【知识 1】【变限积分】

【例 1】 (1)设函数 $f(x)$ 连续, 则 $\int_a^x f(t)dt$ 是(C).

(A) $f'(x)$ 的一个原函数 (B) $f'(x)$ 的原函数的一般表达式

(C) $f(x)$ 的一个原函数 (D) $f(x)$ 的原函数的一般表达式

(2)设 $f(x)$ 为连续的奇函数, 又 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$,则 $F(-x)$=( ). A

(A) $F(x)$ (B) $-F(x)$ (C) 0 (D) 非零常数

(3) $\frac{d}{dx}\int_a^b \arctan x dx = $ ( ). D

(A) $\arctan x$ (B) $\frac{1}{1+x^2}$ (C) $\arctan b - \arctan a$ (D) 0

【练习 1】

1.设函数 $\Phi(x) = \int_0^{x^2} te^t dt$， 则 $\Phi'(x) = $ ( ).C

(A) xe^{-x} (B) $-xe^{-x}$ (C) $2x^3e^{-x^2}$ (D) $-2x^3e^{-x^2}$

2. 若已知 $g(x) = \int_x^1 e^{t^2} dt$, 则 $\frac{dg(x)}{dx} = $__________.

【答案】(1) C; (2) $-e^{x^2}$

【知识 2】【变限积分的应用】求极限；求值；

【例 2】 (1)设 $f(x)$ 为可导函数，且已知 $f(0) = 0$， $f'(0) = 2$，则 $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(x)dx}{x^2}$ 之值为( ).B

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

(2)设 $f(x)$ 连续， $x > 0$，且 $\int_1^{x^2} f(t)dt = x^2(1+x)$，则 $f(2) = $ ( ). C

(A) 4　　(B) $2\sqrt{2}+12$　　(C) $1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　(D) $12-2\sqrt{2}$

【练习 1】

1. (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt}{x^2}$；

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}\bullet 2x}{2x}=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot(\int_0^x e^{t^2}dt)'}{xe^{2x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot e^{x^2}}{xe^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{1+2x^2}=2$.

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt$，其中 $f(x)$连续;

解法一　$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim\limits_{\xi\to a}xf(\xi)=af(a)$　(用的是积分中值定理).

解法二　$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x\int_a^x f(t)dt}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\int_a^x f(t)dt+xf(x)}{1}=af(a)$　(用的是洛必达法则).

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\arctan x)^2}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}(\arctan x)^2=\dfrac{\pi^2}{4}$.

2.（1） 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且$\int_0^x f(t)dt=x(1+\cos x)$，则$f(\dfrac{\pi}{2})=$ ____________

【答案】$1-\dfrac{\pi}{2}$

（2）当 x 为何值时，$F(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt$ 取到极小值.

解 $F'(x)=xe^{-x^2}$，令 $F'(x)=0$，即 $xe^{-x^2}=0$，于是，求得 $x=0$. 又 $F''(x)=(1-2x^2)e^{-x^2}$，$F''(0)=1<0$，故当 $x=0$ 时，$F(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt$ 取到极小值.

【知识 3】变限积分的"换元"的应用

【例 3】 设 $f(x)$ 连续, 若 $f(x)$ 满足 $\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=1-\cos x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t \overset{x-t=u}{=} -\int_x^0 (x-u)f(u)\mathrm{d}u = x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$，即

$$x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u=1-\cos x$$

方程两边同时对 x 求导，得

$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)-xf(x)=\sin x$$

即 $\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\sin x$，故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\mathrm{d}u=\sin\frac{\pi}{2}=1$

【练习 3】

1.设 $f(x)$ 是连续函数，$I=t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)dx$,其中 $t>0,s>0$,则 I 的值(D)．

(A) 依赖于 s 和 t　　(B) 依赖于 s, t 和 x

(C) 依赖于 t，不依赖于 s　　(D) 依赖于 s，不依赖于 t

2. 设 $f(x)$ 连续, 若 $f(x)$ 满足 $\int_0^1 f(xt)dt=f(x)+xe^x$, 求 $f(x)$.

解: 令 $u=xt$, 则

$$\int_0^1 f(xt)dt=\int_0^x f(u)\frac{du}{x}-\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du,$$

因此 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(u)du=xf(x)+x^2e^x$,

两边关于 x 求导, 可得：　$f(x)=f(x)+xf'(x)+2xe^x+x^2e^x$.

因此 $f'(x)=-(2+x)e^x$, 说明 $f(x)$ 是 $-(2+x)e^x$ 的原函数.

$\therefore\ f(x)=-\int(2+x)e^x dx=-(x+1)e^x+C$　C 为任意常数.

3.设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$.

【详解】 作积分变量代换，命 $x-t=u$，则

$$\int_0^x f(x-t)dt=\int_x^0 f(u)(-du)=\int_0^x f(u)du,$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(u)du}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)du+xf(x)}$$

$$\overset{\text{整理}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(u)du + xf(x)} \overset{\text{上下同除}x}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}{f(x)+\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}$$

而 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to 0}\frac{(\int_0^x f(t)dt)'}{x'} = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

所以由极限的四则运算法则得，

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}{f(x)+\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}{\lim_{x\to 0} f(x)+\lim\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt} = \frac{f(0)}{f(0)+f(0)} \overset{f(0)\neq 0}{=} \frac{1}{2}.$$

++

三、定积分的计算法 —直接积分法、换元法及分部积分法

【知识 1】直接积分法

【例 1】(1) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x) = x + 2\int_0^1 f(t)dt$，则 $f(x) = ($　　$)$.

(A) $\frac{x^2}{2}$　　(B) $\frac{x^2}{2}+2$　　(C) $x-1$　　(D) $x+2$

(2) 求 $\int_{-1}^3 f(x)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases} 2+x, x<0 \\ \sqrt{x}, x\geq 0. \end{cases}$.

解 $\int_{-1}^3 f(x)dx = \int_{-1}^0 (2+x)dx + \int_0^3 \sqrt{x}dx = (2x+\frac{1}{2}x^2)\Big|_{-1}^0 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = \frac{3}{2}+2\sqrt{3}$.

【练习 1】

1. (1) 计算 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx.$

解 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx = \int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}dx - \int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx = -x^{-1}\Big|_1^{\sqrt{3}} - \arctan x\Big|_1^{\sqrt{3}} = 1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{12}$.

2.求 $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2-4}$.

解 原式$=\frac{1}{4}\int_{-1}^1(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2})dx = \frac{1}{4}(\ln|x-2|\Big|_{-1}^1 - \ln|x+2|\Big|_{-1}^1) = -\frac{1}{2}\ln 3$

3. 求 $\int_0^1\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx.$

解 原式 $=\int_0^1\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \arctan e^x\Big|_0^1 = \arctan e - \frac{\pi}{4}$

【知识 2】第一换元法—凑微分

【例 2】(1) 求 $\int_1^2 (x-3)^5 dx.$

解 $\int_1^2 (x-3)^5 dx = \int_1^2 (x-3)^5 d(x-3) = \frac{1}{6}(x-3)^6\Big|_1^2 = -\frac{63}{6}.$

(2) 求 $\int_0^1 te^{\frac{-t^2}{2}} dt$.

解 $\int_0^1 te^{\frac{-t^2}{2}} dt = -\int_0^1 e^{\frac{-t^2}{2}} d(\frac{-t^2}{2}) \quad = -e^{\frac{-t^2}{2}}\Big|_0^1 = 1-e^{-\frac{1}{2}}$.

【练习 2】

1. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx.$

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x d\cos x = -\frac{\cos^4 x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$

2. 求 $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

解 $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^{e^2} \frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}} \quad = 2(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}\Big|_1^{e^2} = 2(\sqrt{3}-1)$.

3. 求 $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$.

解 $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int_0^3 \sqrt{x+1} dx - \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx \quad = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 - 2(x+1)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^3 = \frac{8}{3}$

【知识 3】第二换元法—根式代换、三角代换等

【例 3】(1) 求 $\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{2x}} dx.$

解 $\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{2x}} dx \overset{t=\sqrt{2x}}{=\!=\!=} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2}+t} dt \quad = 2\int \frac{1}{t+2} dt = 2\ln|t+2|\Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\ln\frac{\sqrt{2}+2}{2}.$

(2) 求 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} dx.$

解 设 $x=\tan t$, 则有 $\sqrt{(x^2+1)^3} = \sec^3 t, dx = \sec^2 t dt$ ， 由 $x\in[0,1]$， 有 $t\in[0,\frac{\pi}{4}]$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 tdt}{\sec^3 t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos tdt=\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【练习 3】

1. (1) 求 $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$.

解 $$\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}=-\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{4}(5-4x)-\frac{5}{4}}{\sqrt{5-4x}}dx=-\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{5-4x}dx+\frac{5}{4}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$$

$$=\frac{1}{16}\int_{-1}^{1}\sqrt{5-4x}d(5-4x)-\frac{5}{16}\int_{-1}^{1}\frac{d(5-4x)}{\sqrt{5-4x}}$$

$$=\frac{1}{24}(5-4x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1}-\frac{5}{8}(5-4x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{1}=-\frac{13}{12}+\frac{5}{4}=\frac{1}{6}.$$

(2) 求 $\int_1^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

解　令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，由 $x\in[1,4]$，有 $t\in[1,2]$，于是

$$\int_1^4\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=\int_1^2\frac{1}{1+t}d(t^2)=\int_1^2\frac{2t}{1+t}dt=\int_1^2\frac{2(1+t)-2}{1+t}dt$$

$$=2-2\int_1^2\frac{1}{1+t}dt=2-2\ln(1+t)\Big|_1^2=2+2\ln\frac{2}{3}$$

(3) 求 $\int_1^5\frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx.$

解 $$\int_1^5\frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx\overset{t=2x-1}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{2}\int_1^9\frac{1}{\sqrt{t}}dt\ \sqrt{t}\Big|_1^9=2.$$

2. (1) 求 $\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}-1}$.

解　令 $x=\sin^2 t$，则 $t=\arcsin\sqrt{x}$，由 $x\in[\frac{3}{4},1]$，有 $t\in[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$，于是

$$\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x}-1}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin t\cos t}{\cos t-1}dt=-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos t}{\cos t-1}d(\cos t)$$

$$=(-2\cos t-2\ln|\cos t-1|)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=1-2\ln 2.$$

(2)求$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}\overset{x=\sin t}{=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{1+\cos t}dt=t-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}dt \quad =(t-\tan\frac{t}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{12}$.

(3)求$\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解 令 $x=\sec t$，则$t=arc\sec x$，由$x\in[\sqrt{2},2]$，有$t\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]$，于是

$$\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sec t\tan t}d(\sec t) \quad =\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}1dt=\frac{\pi}{12}$$

【知识 4】分部积分法

【例 4】 (1) 求$\int_0^1 e^{\sqrt{2x+1}}dx.$

解 令 $\sqrt{2x+1}=t$，$x=\frac{1}{2}(t^2-1)$，$dx=tdt$

原式 $=\int_1^{\sqrt{3}}te^t dt=e^t(t-1)\Big|_1^{\sqrt{3}} =e^{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)$.

(2)求$\int_1^4\ln\sqrt{x}dx$.

解 $\int_1^4\ln\sqrt{x}dx\overset{t=\sqrt{x}}{=\!=\!=\!=}\int_1^2 2t\ln tdt=\int_1^2\ln tdt^2=t^2\ln t\Big|_1^2-\int_1^2 tdt=4\ln 2-\frac{3}{2}$.

(3) 计算$\int_0^{e-1}\ln(1+x)dx.$

解 原式 $=x\ln(1+x)\big|_0^{e-1}-\int_0^{e-1}\frac{x}{1+x}dx$

$=e-1-\int_0^{e-1}(1-\frac{1}{1+x})dx$

$=e-1-\left[x-\ln(1+x)\right]_0^{e-1}$

$=1$.

(4) 计算积分$\int_1^e\cos(\ln x)dx.$

解 原式 $=x\cos(\ln x)\Big(_1^e+\int_1^e\sin(\ln x)dx$

$=e\cos1-1+\left[x\sin(\ln x)\Big(_1^e-\int_1^e\cos(\ln x)dx\right]$

$=e\cos1-1+e\sin1-\int_1^e\cos(\ln x)dx$

所以原式 $=\frac{1}{2}(e\cos1+e\sin1-1)$.

【练习 4】

1.(1)求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$.

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\sin x = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$.

(2) 计算积分 $\int_0^{\pi} x^2\sin xdx.$

解 原式 $= -x^2\cos x\big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} x\cos xdx$

$= \pi^2 + 2x\sin x\big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}\sin xdx$

$= \pi^2 + 2\cos x\big|_0^{\pi} = \pi^2 - 4$.

2.(1) 计算积分 $\int_1^e x\ln^2 xdx.$.

解 $\int_1^e x\ln^2 xdx = \frac{1}{2}\int_1^e \ln^2 xdx^2$

$= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x\big|_1^e - \int_1^e x\ln xdx$

$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x\big|_1^e + \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{1}{4}\left(e^2 - 1\right)$

(2) 计算积分 $\int_0^1 \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

解 原式 $= \int_0^1 \arctan xd\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2}\arctan x\big|_0^1 - \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi - \ln(x+\sqrt{1+x^2})\big|_0^1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \ln(1+\sqrt{2})$.

(3) 计算积分 $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx.$

解 令 $t = \sqrt{x}$，原式 $= 4\int_1^2 \ln tdt = 4t\ln t\big|_1^2 - 4t\big|_1^2 = 8\ln 2 - 4$

(4) 计算积分 $\int_1^e (\ln x)^2 dx.$

解 原式 $= x(\ln x)^2\big|_1^e - 2\int_1^e \ln xdx$

$= e - 2\left[x\ln x - x\right]_1^e$

$= e - 2$.

3. 计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin 2x dx$.

解 原式 $=\mathrm{I}=-\dfrac{1}{2}\left[e^{2x}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos 2x dx$

$$=\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)+\frac{1}{2}\left[e^{2x}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin 2x dx$$

$$=\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)-\mathrm{I}$$

故原式 $=\dfrac{1}{4}(e^{\pi}+1)$.

【知识 5】积分法的不等式与恒等式证明（另专题）

++

四、广义积分：无穷积分和瑕积分

【知识 1】无穷积分

【例 1】 下列无穷积分收敛的是（ B）.

（A）$\int_0^{+\infty} \sin x dx$　　（B）$\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$

（C）$\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x} dx$　　（D）$\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} dx$

【练习 1】

1(1) $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^4}$;

解 因为

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}=-\frac{1}{3}x^{-3}\Big|_1^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{3}x^{-3})+\frac{1}{3}=\frac{1}{3},$$

所以反常积分 $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^4}$ 收敛，且 $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^4}=\dfrac{1}{3}$.

(2) $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$;

解 因为 $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big|_1^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{x}-2=+\infty$，所以反常积分 $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ 发散.

2. (1) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ (a>0);

解 因为

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx=-\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{a}e^{-ax})+\frac{1}{a}=\frac{1}{a},$$

所以反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ 收敛，且 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx=\dfrac{1}{a}$.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+2x+2}$;

解 $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+(x+1)^2}=\arctan(x+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\dfrac{\pi}{2}-(-\dfrac{\pi}{2})=\pi$.

【知识 2】瑕积分

【例 2】(1) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{(1+x)^2}=(\quad)$. D

(A) $-\frac{4}{3}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $-\frac{2}{3}$ (D) 不存在

(2) $\int_{1}^{2}\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx.$

解 $x=1$ 是瑕点, $\int_{1}^{2}\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx \overset{t=\sqrt{x-1}}{=\!=\!=\!=\!=} \int_{0}^{1}\frac{t^2+1}{t}2tdt=2(\frac{t^3}{3}+t)\Big|_0^1=\frac{8}{3}$.

【练习 2】

1. $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

解 $x=1$ 为瑕点，因为

$$\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{u\to1}\int_0^u\frac{-\frac{1}{2}d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{u\to1}[-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]\Big|_0^u=\lim_{u\to1}[1-(1-u^2)^{\frac{1}{2}}]=1\text{，}$$

故 $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ 收敛，其值为 1.

2. 判断积分的敛散性 $\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^2}$

解 $x=1$ 是瑕点，由于 $\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}=\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^2}+\int_1^2\frac{dx}{(1-x)^2}$，而

$$\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^2}=-\int_0^1\frac{d(1-x)}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}\Big|_0^1=+\infty$$，故该广义积分发散.

3. $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

解 $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\int_1^e\frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\arcsin(\ln x)\Big|_1^e=\frac{\pi}{2}$，该广义积分收敛.