第四章 不定积分

一、原函数和不定积分概念与性质

【知识 1】 1. $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数.

2. $f(x)$ 的全部原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记为 $\int f(x)dx=F(x)+C$.

3. 性质：

1) ① $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x)$ 或 $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$；

② $\int F'(x)dx=F(x)+C$ 或 $\int dF(x)=F(x)+C$；

2) $\int[\alpha f(x)\pm\beta g(x)]dx=\alpha\int f(x)dx\pm\beta\int g(x)dx$， α,β 为非零常数.

【例 1】 (1)若 $\int f(x)dx=F(x)+C$ 且 $x=at+b,a\neq 0$, 则 $\int f(t)dt=($ $)$. D

(A) $F(x)+C$ (B) $F(at+b)+C$ (C) $\frac{1}{a}F(at+b)+C$ (D) $F(t)+C$

(2) 设 $I=\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx+\frac{d}{dx}\int_3^4 f(x)\,dx+\int f'(x)\,dx$ 存在，则 $I=$（ D ）

A、0 B、$f(x)$ C、$2f(x)$ D、$2f(x)+c$

(3) 下列等式成立的是（ A ）

（A）$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$ （B）$\int f'(x)dx=f(x)$ （C）$d\int f(x)dx=f(x)$ （D）$\int df(x)=f(x)$

【练习 1】

1.(1)若 $\int f(x)dx=x^2e^{2x}+c$，则 $f(x)=$（ C ）

（A）$2xe^{2x}$ （B）$2x^2e^{2x}$ （C）$2xe^{2x}(1+x)$ （D）xe^{2x}

(2)如果等式 $\int f(x)e^{-\frac{1}{x}}dx=-e^{-\frac{1}{x}}+C$，则 $f(x)=$（ B ）

（A）$-\frac{1}{x}$ （B）$-\frac{1}{x^2}$ （C）$\frac{1}{x}$ （D）$\frac{1}{x^2}$

2. (1)设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，则 $d[\int f(x)\,dx]$=(C)

A、$f(x)$ B、$f(x)+c$ C、$f(x)dx$ D、$f'(x)dx$

(2)设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则结论(D)成立.

(A) $\int_a^b F(x)dx=f(b)-f(a)$ (B) $\int d(f(x))=F(x)+C$

(C) $(\int f(x)dx)'=F(x)$ (D) $\int d(F(x))=F(x)+C$

(3) $\int xf''(x)\mathrm{d}x=$（ A ）

（A） $xf'(x)-f(x)+c$ （B） $xf'(x)+c$ （C） $\frac{1}{2}x^2f'(x)+c$ （D） $(x+1)f'(x)+c$

3.(1)设 $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$，则 $f(x)$ 的一个原函数是(D).

(A) $\arcsin x$ (B) $\arctan x$ (C) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$ (D) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

(2)若 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{1}{x}$，则 $f'(x)=$（ D ）

（A） $\ln|x|$ （B） $\frac{1}{x}$ （C） $-\frac{1}{x^2}$ （D） $\frac{2}{x^3}$

(3) $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln x$，则 $f'(x)=($ $)$.C

(A) $\frac{1}{x}$ (B) $x\ln x-x+C$ (C) $-\frac{1}{x^2}$ (D) e^x

++

二、不定积分的积分法

【知识点 1】第一换元法—凑微分

【例 1】(1)计算不定积分 $\int sinx\, cosxdx$

解 $\int sinx\, cosxdx=\int sinx\, dsinx=\frac{1}{2}\sin^2 x+c$

(2)求 $\int xe^{-2x^2}dx$.

解 $\int xe^{-2x^2}dx=-\frac{1}{4}\int e^{-2x^2}d(-2x^2)=-\frac{1}{4}e^{-2x^2}+c$.

(3)求 $\int\frac{dx}{x(1+2\ln x)}$.

解 $\int\frac{dx}{x(1+2\ln x)}=\int\frac{d\ln x}{1+2\ln x}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+2\ln x)}{1+2\ln x}=\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x)+c$.

【练习 2】

1.(1)求 $\int(2x+5)^{10}dx$.

解 $\int(2x+5)^{10}dx=\frac{1}{2}\int(2x+5)^{10}d(2x+5)=\frac{1}{22}(2x+5)^{11}+c$

(2) $\int\frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int(1+\sqrt{x})^2\mathrm{d}(1+\sqrt{x})=\frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3+C.$

2. (1) $\int x\sin(2-x^2)\,\mathrm{d}x$

解 原式 $=-\frac{1}{2}\int \sin(2-x^2)\,\mathrm{d}(2-x^2)=\frac{1}{2}cos(2-x^2)+C$

(2)求 $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx$.

解 $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx=-\frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}d(2-3x^2)=-\frac{1}{3}\sqrt{2-3x^2}+c$.

(3)求 $\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)-\arcsin x=-2\sqrt{1-x^2}-\arcsin x+c.$$

3. (1) 求 $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx$.

解 $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx=\int \frac{1}{(x\ln x)^2}d(x\ln x)=-\frac{1}{x\ln x}+c$.

(2)求 $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}=\int \frac{1}{\cos^2 x\tan x}dx=\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}dx=\int \frac{1}{\tan x}d\tan x=\ln|\tan x|+c$.

(3)求 $\int \frac{dt}{e^t+e^{-t}}$.

解 $\int \frac{dt}{e^t+e^{-t}}=\int \frac{e^t}{e^{2t}+1}dt=\int \frac{1}{(e^t)^2+1}de^t=\arctan e^t+c$.

【知识点 2】第二换元法—根式代换、三角代换等

【例 2】(1) 求 $\int \frac{1}{x+\sqrt{2x}}dx$.

解 $\int \frac{1}{x+\sqrt{2x}}dx \underline{\underline{t=\sqrt{2x}}} \int \frac{t}{\frac{t^2}{2}+t}dt=2\int \frac{1}{t+2}dt=2\ln|t+2|+c=2\ln\left|\sqrt{2x}+2\right|+c$

(2) 求 $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\mathrm{d}x$.

解 令 $x=2\sec t$, $dx=2\sec t\cdot\tan t\ dt$

$$\therefore \text{原式} = \int \frac{2\tan t \cdot 2\sec t \cdot \tan t}{2\sec t} dt$$

$$= 2\int \tan^2 t\, dt = 2\int (\sec^2 t - 1)\, dt$$

$$= 2\tan t - 2t + C$$

$$= \sqrt{x^2 - 4} - 2\arccos\frac{2}{x} + C$$

(3) 求 $\int x(2x-5)^6 dx$.

解 令 $2x-5=t$，即 $x=\frac{t+5}{2}$， $dx=\frac{1}{2}dt$， 于是

$$\int x(2x-5)^6 dx = \frac{1}{4}\int (t^7 + 5t^6)dt =$$

$$\frac{1}{32}t^8 + \frac{5}{28}t^7 + c = \frac{1}{32}(2x-5)^8 + \frac{5}{28}(2x-5)^7 + c .$$

【练习 2】

1. (1) 求 $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} \mathrm{d}\, x.$

解 令 $\sqrt{1-x}=u, \quad 1-x=u^2, dx=-2udu$

$$\therefore \text{原式} = \int \frac{1+(1-u^2)}{u}(-2udu) = -2\int (2-u^2)du$$

$$= -4\int du + 2\int u^2 du$$

$$= -4u + \frac{2}{3}u^3 + c$$

$$= -4\sqrt{1-x} + \frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3} + c.$$

(2) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx$;

解 $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx \overset{\text{令}x=t^6}{=\!=} \int \frac{t^2}{t^6(t^3+t^2)} \cdot 6t^5 dt = 6\int (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1})dt$

$$= 6\ln\frac{t}{t+1} + C = \ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6} + C .$$

(3) 求 $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x} \mathrm{d}\, x.$

解令 $\sqrt{1+\ln x} = t \; \frac{1}{x}dx = 2tdt$

$$原式=\int\frac{t\cdot 2t}{t^2-1}dt=2\int\frac{t^2}{t^2-1}dt$$
$$=2t+2\int\frac{dt}{t^2-1}$$
$$=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c$$
$$=2\sqrt{1+\ln x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1}\right|+c.$$

2. (1) 求 $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}\underline{\underline{x=\sin t}}\int\frac{\cos t}{1+\cos t}dt=\int dt-\int\frac{1}{1+\cos t}dt=t-\int\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}dt$

$$=t-\int\sec^2\frac{t}{2}d\frac{t}{2}=t-\tan\frac{t}{2}+c=t-\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}+c=t-\frac{\sin t}{1+\cos t}+c$$

(2) 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

解 设 $x=\tan t(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$, 则有 $\sqrt{(x^2+1)^3}=\sec^3 t, dx=\sec^2 tdt$，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}=\int\frac{\sec^2 tdt}{\sec^3 t}=\int\cos tdt=\sin t+c=\tan t\cos t+c=\frac{\tan t}{\sec t}+c$$
$$=\frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}+c=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+c.$$

(3) 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-1}}$.

解 令 $x=\sec t,\qquad dx=\sec t\cdot\tan tdt$

$$原式=\int\frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec^3 t\cdot\tan t}dt=\int\frac{dt}{\sec^2 t}=\int\cos^2 t$$
$$=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin t\cos t+c$$
$$=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2}+c.$$

3. (1) 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)^2}$.

解 设$u=x^{10}$ $10x^{9}dx=du$

原式$=\frac{1}{10}\int\frac{du}{u(u+1)^2}=\frac{1}{10}\int\left[\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{(u+1)^2}\right]du$

$=\frac{1}{10}(\ln|u|-\ln(u+1)+\frac{1}{u+1})+c$

$=\frac{1}{10}\ln\left(\frac{x^{10}}{x^{10}+1}\right)+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x^{10}+1}+c.$

(2) 求$\int\frac{e^x}{e^{2x}-e^x}\mathrm{d}\,x.$

解 原式$=\int\frac{e^x dx}{e^x(e^x-1)}$ 令$e^x=u,$ $e^x dx=du$

$=\int\frac{du}{u(u-1)}=\int(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u})du$

$=\ln|u-1|-\ln|u|+c$

$=\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|+c.$

(3) 求$\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,\mathrm{d}\,x.$

解 令$e^x=\sin t$，则$e^x dx=\cos tdt$，

原式$=\int\cos^2 tdt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt$

$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+c$

$=\frac{1}{2}\arcsin e^x+\frac{1}{2}e^x\sqrt{1-e^{2x}}+c.$

(4) 求$\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}\,x.$

解设$\ln x=t$ $\frac{1}{x}dx=dt$

原式$=\int\frac{t}{\sqrt{1+t}}dt=\int(\sqrt{1+t}-\frac{1}{\sqrt{1+t}})dt$

$=\frac{2}{3}(1+t)^{3/2}-2(1+t)^{\frac{1}{2}}+c$

$=\frac{2}{3}(-2+\ln x)\sqrt{1+\ln x}+c.$

【知识点 3】分部积分法

【例 3】 (1) 求 $\int x\cos 3x\,\mathrm{d}x.$

解 $\int x\cos 3xdx = \frac{1}{3}\int xd(\sin 3x) = \frac{1}{3}\left[x\sin 3x - \int \sin 3xdx\right] = \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + c.$

(2) 求 $\int x\ln x\,\mathrm{d}x.$

解 $\int x\ln xdx. = \int \ln xd(\frac{x^2}{2}) = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{x^2}{4} + c.$

(3)求 $\int \arctan x\,\mathrm{d}x.$

解 $\int \arctan xdx = x\cdot\arctan x - \int\frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$

(4)求 $\int e^x\cos xdx$.

解 $I = \int \cos xd(e^x) = e^x\cos x - \int e^x d(\cos x)$

$= e^x\cos x + \int e^x \sin xdx = e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos xdx$

$\int e^x\cos dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C.$

【练习 3】

1.(1) 求 $\int x\sin x\,\mathrm{d}x.$

解 $\int x\sin xdx = -\int xd\cos x = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + c.$

(2) 求 $\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x.$

解 $\int xe^{-x}dx = -\int xd(e^{-x}) = -(xe^{-x} - \int e^{-x}dx) = -xe^{-x} - e^{-x} + c.$

(3)求 $\int x^2e^xdx$.

解 $\int x^2e^xdx = \int x^2d(e^x) = x^2e^x - \int e^xd(x^2) = x^2e^x - 2\int xe^xdx$

$= x^2e^x - 2(x-1)e^x + C = (x^2-2x+2)e^x + C$

2.(1) 求 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x.$

解 $\int x\arctan xdx = \int \arctan xd(\frac{x^2}{2}) = \frac{x^2}{2}\cdot\arctan x - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + c.$$

(2) 求 $\int \frac{1-\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}\,x.$

解 $\int \frac{1-\ln x}{x^2}dx = \int \frac{1}{x^2}dx + \int \ln x d(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\ln x - \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} + c$

(3) 求 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x.$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \int \ln x d(2\sqrt{x})$$

$$= 2\sqrt{x}\cdot\ln x - \int 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + c.$$

(4) 求 $\int \arcsin x dx$.

解 取 $u = \arcsin x, dv = dx$，则

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int x d(\arcsin x) =$$

$$x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2) =$$

$$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C .$$

3. 求 $\int e^x \sin x\,\mathrm{d}\,x.$

解 $\int e^x \sin x dx = \int \sin x d(e^x) = \sin x\cdot e^x - \int e^x \cos x dx = \sin x\cdot e^x - \int \cos x d(e^x)$

$$= \sin x\cdot e^x - e^x\cos x + \int e^x(-\sin x)dx$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c.$$

【知识点 4】有理函数积分

【例 4】(1) 求 $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$.

解：$\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx=\int(1+\frac{3}{(x-3)(x-2)})dx$

$=\int dx+3\int\frac{1}{x-3}dx-3\int\frac{dx}{x-2}$

$=x+3\ln|x-3|-3\ln|x-2|+c$

$=x+3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+c.$

(2) 求 $\int \frac{1}{(x+1)(x-2)}dx$.

解 $\int\frac{1}{(x+1)(x-2)}dx=\frac{1}{3}\int(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1})dx$

$=\frac{1}{3}[\int\frac{1}{x-2}d(x-2)-\int\frac{1}{x+1}d(x+1)]$

$=\frac{1}{3}(\ln|x-2|-\ln|x+1|)+c=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+c$.

(3) 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2)(x^2+3)}$.

解 $\int\frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}$

$=\frac{1}{5}\left[\int\frac{1}{x^2-2}dx-\int\frac{1}{x^2+3}dx\right]$

$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{5\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}+c.$

【练习 4】

1.(1) $\int\frac{x^3}{x+3}dx$;

解 $\int\frac{x^3}{x+3}dx=\int\frac{x^3+27-27}{x+3}dx=\int\frac{(x+3)(x^2-3x+9)-27}{x+3}dx$

$=\int(x^2-3x+9)dx-27\int\frac{1}{x+3}dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C$.

(2) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx$；

解 $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx=\int(x^2+x+1)dx+\int\frac{x^2+x-8}{x^3-x}dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\int\frac{8}{x}dx-\int\frac{4}{x+1}dx-\int\frac{3}{x-1}dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+8\ln|x|-4\ln|x+1|-3\ln|x-1|+C$.

(3)求 $\int \frac{dx}{x(x^6+4)}$.

解 $\int \frac{dx}{x(x^6+4)}=\int\frac{dx}{x^7(1+4x^{-6})}=-\frac{1}{24}\int\frac{d\,4x^{-6}}{1+4x^{-6}}$

$=-\frac{1}{24}\ln(1+4x^{-6})+c$

$=-\frac{1}{24}\ln\frac{x^6}{x^6+4}+c$.

2.(1) 求 $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{4-x^4}$.

解 原式 $=\int\frac{\mathrm{d}x}{(2-x^2)(2+x^2)}$

$=\frac{1}{4}\int(\frac{1}{2-x^2}+\frac{1}{2+x^2})\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|+\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+c.$

(2) 求 $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{(x^2-2)(x^2+3)}$.

解 $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}$

$=\frac{1}{5}\left[\int\frac{1}{x^2-2}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2+3}\mathrm{d}x\right]$

$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{5\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}+c.$

3.(1) $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$；

解 $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx \xlongequal{令\sqrt{x+1}=u} \int\frac{u-1}{u+1}\cdot 2udu=2\int(u-2+\frac{2}{u+1})du$

$$=2(\frac{1}{2}u^{2}-2u+2\ln|u+1|)+C$$

$$=(x+1)-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}+1)+C\ .$$

(2) $\int\frac{x^{2}+1}{(x+1)^{2}(x-1)}dx$；

解 $\int\frac{x^{2}+1}{(x+1)^{2}(x-1)}dx=\int[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x+1)^{2}}]dx$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{x+1}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^{2}-1|+\frac{1}{x+1}+C\ .$$

(3) $\int\frac{dx}{(x^{2}+1)(x^{2}+x)}$；

解 $\int\frac{dx}{(x^{2}+1)(x^{2}+x)}=\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x^{2}+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1})dx$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^{2}+1}dx$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\int\frac{2x}{x^{2}+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^{2}+1}dx$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^{2}+1)-\frac{1}{2}\arctan x+C\ .$$