

第三章 微分中值定理与导数的应用

一、求极限

- 【知识 1】1. 洛必达法、等价替换、变限积分
2. 拉格朗日中值定理、泰勒公式、定积分定义

【例 1】洛必达法

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{(1 - \cos x) \sin x}$$

$$\text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\frac{1}{2}x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\frac{3}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{3}{2}x^2} = -\frac{1}{3}$$

$$(2) \text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

解

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln(1+x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{2(x-1)} = -\frac{1}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

$$= 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(\ln \arctan x + \ln \frac{2}{\pi})}, \text{ 因为}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln \arctan x + \ln \frac{2}{\pi}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \arctan x + \ln \frac{2}{\pi})'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{\pi},$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(\ln \arctan x + \ln \frac{2}{\pi})} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_a^x f(t) dt, \text{ 其中 } f(x) \text{ 连续};$$

$$\text{解法一 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_a^x f(t) dt = \lim_{\xi \rightarrow a} x f(\xi) = a f(a) \text{ (用的是积分中值定理).}$$

$$\text{解法二 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_a^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x \int_a^x f(t) dt}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt + x f(x)}{1} = a f(a) \quad (\text{用的是洛必达法则}).$$

【练习 1】

1.(1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-x} - 3x}{1 - \cos x}$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} + e^{-x} - 3}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{2x} - e^{-x}}{\cos x} = 3$$

(2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$.

$$\begin{aligned} \text{解原式} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x [\ln x + 1] - 1}{\frac{1}{x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x [\ln x + 1]^2 + x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= -2 \end{aligned}$$

2.(1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(1 - e^x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

(2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1+x}{x} \right]$

$$\begin{aligned} \text{解原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x+1)\ln(1+x)}{x \ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x+1)\ln(1+x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 - \ln(1+x)}{2x} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(3) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +0} (\sin 2x)^{\frac{1}{1+3\ln x}}$.

解: 设 $y = (\sin 2x)^{\frac{1}{1+3\ln x}}$

$$\begin{aligned}\text{则 } \lim_{x \rightarrow +0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin 2x}{1+3\ln x} \\&= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{2 \cos 2x}{\sin 2x}}{\frac{3}{x}} \\&= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +0} \cos 2x \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \\&= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

故原式 $= e^{\frac{1}{3}}$ 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x}{x+1} \right)^{\frac{2x}{x-1}}$.

(4) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x}{x+1} \right)^{\frac{2x}{x-1}}$.

$$\begin{aligned}\text{解: 设 } y &= \left(\frac{2x}{x+1} \right)^{\frac{2x}{x-1}} \\ \text{则 } \lim_{x \rightarrow 1} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x-1} \cdot \ln \frac{2x}{x+1} \\&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \frac{2x}{x+1}}{\frac{x-1}{2x}} \\&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x+1}{2x} \cdot \frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2}} \\&= 1\end{aligned}$$

故原式 $= e$

3. (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} (\arctan x)^2 = \frac{\pi^2}{4}.$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x t e^{2t^2} dt}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x t e^{2t^2} dt} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt \cdot (\int_0^x e^{t^2} dt)'}{x e^{2x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt \cdot e^{x^2}}{x e^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt}{x e^{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1 + 2x^2} = 2.
 \end{aligned}$$

二、导数的应用

【知识 1】求函数的单调区间及其证题

【例 1】(1) 确定 $y = \frac{2x}{1+x^2}$ 的单调区间.

解: 函数的定义域 $(-\infty, +\infty)$, $y' = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x_1 = 1, x_2 = -1$

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y/	-	0	+	0	-
y	↓		↑		↓

函数在 $(-\infty, -1]$ 及 $[1, +\infty)$ 上单调减

在 $[-1, 1]$ 上单调增

(2) 已知 $b > a > e$, 证明 $a^b > b^a$.

证明: 令 $f(x) = \frac{\ln x}{x} (x > e)$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$, 所以 $f(x)$ 单调递减

当时 $b > a > e$, 有 $f(a) > f(b)$, 即, $\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}$, 所以 $a^b > b^a$

【练习 1】

1. 设在 $[0, 1]$ 上 $f''(x) > 0$, 则 $f'(0), f'(1), f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 几个数的大小顺序为().

- (A) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$; (B) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$;
 (C) $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$; (D) $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$.

解 选择 B.

提示: 因为 $f''(x) > 0$, 所以 $f'(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调增加, 从而 $f'(1) > f'(x) > f'(0)$.

又由拉格朗日中值定理, 有 $f(1) - f(0) = f'(\xi)$, $\xi \in [0, 1]$, 所以

$$f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0).$$

2. 求函数 $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ 的单调区间

解: 定义域 $(0, +\infty)$ $y' = \frac{\ln x}{x^2} (2 - \ln x)$

解得驻点 $x_1 = 1, x_2 = e^2$

x	$(0, 1)$	1	$(1, e^2)$	e^2	$(e^2, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

故函数单调减区间是 $(0, 1], [e^2, +\infty)$

单调增区间是 $[1, e^2]$

【知识 2】求函数的凹凸区间及拐点

【例 2】(1) 求函数 $y = \ln(x^2 + 1)$ 的拐点及凹或凸的区间:

$$\text{解 } y' = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad y'' = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2 + 1)^2}. \quad \text{令 } y'' = 0, \text{ 得 } x_1 = -1, x_2 = 1.$$

列表得

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\cap$	$\ln 2$ 拐点	$\cup$	$\ln 2$ 拐点	$\cap$

可见曲线在 $(-\infty, -1]$ 和 $[1, +\infty)$ 内是凸的, 在 $[-1, 1]$ 内是凹的, 拐点为 $(-1, \ln 2)$ 和 $(1, \ln 2)$.

(2) 问 a 、 b 为何值时, 点 $(1, 3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点?

解 $y' = 3ax^2 + 2bx$, $y'' = 6ax + 2b$. 要使 $(1, 3)$ 成为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点,

必须 $y(1) = 3$ 且 $y''(1) = 0$, 即 $a + b = 3$ 且 $6a + 2b = 0$,

解此方程组得 $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{9}{2}$.

【练习 2】

1. 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有三阶连续导数, 如果 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$, 则 () C

(A) x_0 是极值点, $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点 (B) x_0 是极值点, $(x_0, f(x_0))$ 不一定是拐点

(C) x_0 不是极值点, $(x_0, f(x_0))$ 是拐点 (D) x_0 不是极值点, $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点

2. 求函数 $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 5$ 的拐点及凹或凸的区间:

$$\text{解 } y' = 3x^2 - 10x + 3, \quad y'' = 6x - 10. \quad \text{令 } y'' = 0, \text{ 得 } x = \frac{5}{3}.$$

因为当 $x < \frac{5}{3}$ 时, $y'' < 0$; 当 $x > \frac{5}{3}$ 时, $y'' > 0$,

所以曲线在 $(-\infty, \frac{5}{3}]$ 内是凸的, 在 $[\frac{5}{3}, +\infty)$ 内是凹的, 拐点为 $(\frac{5}{3}, \frac{20}{27})$.

3. 试决定曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 中的 a 、 b 、 c 、 d , 使得 $x = -2$ 处曲线有水平切线, $(1, -10)$ 为拐点, 且

点 $(-2, 44)$ 在曲线上.

解 $y'=3ax^2+2bx+c$, $y''=6ax+2b$. 依条件有

$$\begin{cases} y(-2)=44 \\ y(1)=-10 \\ y'(-2)=0 \\ y''(1)=0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -8a+4b-2c+d=44 \\ a+b+c+d=-10 \\ 12a-4b+c=0 \\ 6a+2b=0 \end{cases}.$$

解之得 $a=1, b=-3, c=-24, d=16$.

【知识3】求函数的极值与最值

【例3】(1) 求函数 $y = x^2 - \ln x^2$ 的极值

解:

函数的定义域 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$

$$y' = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

令 $y'=0$ 得: $x=1, x=-1$, 而 $x=0$ 时, y' 不存在

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	—	0	+	x	—	0	+
y	↓		↑		↓		↑

故函数在 $x = \pm 1$ 处取得极小值

$$y(\pm 1) = 1$$

(2) 试问 a 为何值时, 函数 $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值? 它是极大值还是极小值? 并求此极值.

解 $f'(x) = a \cos x + \cos 3x$, $f''(x) = -a \sin x - 3 \sin x$.

要使函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值, 必有 $f'(\frac{\pi}{3}) = 0$, 即 $a \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$, $a = 2$.

当 $a=2$ 时, $f''(\frac{\pi}{3}) = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$. 因此, 当 $a=2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值, 而且取得极大值, 极大值为 $f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$.

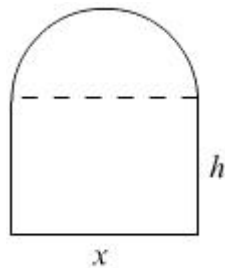
(3) 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆(如图), 截面的面积为 5m^2 , 问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小, 从而使建造时所用的材料最省?

解 设矩形高为 h , 截面的周长 S , 则 $xh + \frac{1}{2} \cdot (\frac{x}{2})^2 \pi = 5$, $h = \frac{5}{x} - \frac{\pi}{8}x$. 于是

$$S = x + 2h + \frac{x\pi}{2} = x + \frac{\pi}{4}x + \frac{10}{x} \quad (0 < x < \sqrt{\frac{40}{\pi}}),$$

$$S' = 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{10}{x^2}.$$

令 $S'=0$, 得唯一驻点 $x = \sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$.



因为 $S'' = \frac{20}{x^3} > 0$, 所以 $x = \sqrt[3]{\frac{40}{4+\pi}}$ 为极小值点, 同时也是最小值点.

因此底宽为 $x = \sqrt[3]{\frac{40}{4+\pi}}$ 时所用的材料最省.

【练习 3】

1. 函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续且取得极大值则 $f(x)$ 在 x_0 处必有 (D)

- (A) $f'(x_0) = 0$ (B) $f''(x_0) < 0$
 (C) $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) < 0$ (D) $f'(x_0) = 0$ 或不存在

2. 函数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 在 $x = -1$ 处取得极值, 且在点 $(1, 0)$ 处与直线 $y = 2(1 - x)$ 相切, 求 a, b, c 之值

解: $y' = 3x^2 + 2ax + b$

$$\begin{aligned} \text{由已知: } y'(-1) = 0 \quad & \text{即} \quad 2a - b = 3 \\ y'(1) = -2 \quad & \text{即} \quad 2a + b = -5 \\ y(1) = 0 \quad & \text{即} \quad a + b + c = -1 \end{aligned}$$

$$\text{解得 } a = -\frac{1}{2}, \quad b = -4, \quad c = +\frac{7}{2}$$

3.(1) 要造一圆柱形油罐, 体积为 V , 问底半径 r 和高 h 等于多少时, 才能使表面积最小? 这时底直径与高的比是多少?

解 由 $V = \pi r^2 h$, 得 $h = V\pi^{-1}r^{-2}$. 于是油罐表面积为

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \quad (0 < r < +\infty),$$

$$S' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}.$$

$$\text{令 } S' = 0, \text{ 得驻点 } r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

因为 $S'' = 4\pi + \frac{4V}{r^3} > 0$, 所以 S 在驻点 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 处取得极小值, 也就是最小值. 这时相应的高为 $h = \frac{V}{\pi r^2} = 2r$.

底直径与高的比为 $2r : h = 1 : 1$.

(2) 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.

解 令 $f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} \quad (x > 0)$, 则

$$\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln x,$$

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \ln x = \frac{1}{x^2} (1 - \ln x),$$

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x).$$

令 $f'(x)=0$, 得唯一驻点 $x=e$.

因为当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, 所以唯一驻点 $x=e$ 为最大值点.

因此所求最大项为 $\max\{\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}\} = \sqrt[3]{3}$.

【考点 4】求曲线的渐近线

【例 4】求曲线 $y^3 = 6x^2 + x^3$ 的渐近线

解:

$y = \sqrt[3]{6x^2 + x^3}$ 处处连续, 无铅直渐近线

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{6x^2 + x^3}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{6x^2 + x^3} - x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{6}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - 1}{\frac{1}{x}} = 6 \times \frac{1}{3} = 2$$

所求渐近线为 $y = x + 2$

【练习 4】

1. 求曲线 $2y(x+1)^2 = x^3$ 的渐近线

解:

$$y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \infty$$

$x = -1$ 是所求的一铅直渐近线

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(y - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - (x^3 + 2x^2 + x)}{2(x+1)^2} = -1$$

故 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 是所求的一斜渐近线

【考点 5】求曲率

【例 5】求抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.

解 $y'=2x-4, y''=2$.

令 $y'=0$, 得顶点的横坐标为 $x=2$.

$$y'|_{x=2}=0, y''|_{x=2}=2.$$

所求曲率为

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{|2|}{(1+0^2)^{3/2}} = 2,$$

曲率半径为

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{1}{2}.$$

【练习5】

1. 求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点 $(0, 2)$ 处的曲率.

解 两边对 x 求导数得

$$8x+2yy'=0, y'=-\frac{4x}{y}, y''=-\frac{4y-4xy'}{y^2}.$$

$$y'|_{(0,2)}=0, y''|_{(0,2)}=-2.$$

所求曲率为

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{|-2|}{(1+0^2)^{3/2}} = 2.$$

2. 求曲线 $x=a \cos^3 t, y=a \sin^3 t$ 在 $t=t_0$ 处的曲率.

$$\text{解 } y' = \frac{(a \sin^3 t)'}{(a \cos^3 x)'} = -\tan t, y'' = \frac{(-\tan x)'}{(a \cos^3 x)'} = \frac{1}{3a \sin t \cdot \cos^4 t}.$$

所求曲率为

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{\left| \frac{1}{3a \sin t \cdot \cos^4 t} \right|}{(1+\tan^2 t)^{3/2}} = \left| \frac{1}{3a \sin t \cos^3 t} \right| = \frac{2}{3|a \sin 2t|},$$

$$K|_{t=t_0} = \frac{2}{3|a \sin 2t_0|}.$$

三、微分中值定理

【例1】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 可导, 且 $f(0)=1, f(1)=\frac{1}{e}$,

求证: 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = -e^{-\xi}$.

证明: 令 $F(x) = f(x) - e^{-x}$.

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导

且 $F(0) = F(1) = 0$, (因 $f(0)=1, f(1)=\frac{1}{e}$)

即 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理

的条件

则至少存在 $\xi \in (0,1)$, 使

$$F'(\xi) = 0.$$

而 $F'(x) = f'(x) + e^{-x}$

即在 $(0,1)$ 内至少存在 ξ , 使

$$f'(\xi) = -e^{-\xi}.$$

【练习 1】

1. 设 $f(x) = \sqrt{x}$, 在 $[1,4]$ 上使得拉格朗日中值定理成立的点 $\xi = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \frac{9}{4}$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, 则下列不等式正确的是 (B)

(A) $f'(b) > f'(a) > f(b) - f(a)$ (B) $f'(b) > f(b) - f(a) > f'(a)$

(C) $f(b) - f(a) > f'(b) > f'(a)$ (D) $f'(a) > f(b) - f(a) > f'(b)$

3. 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上存在二阶连续导数, $f'_+(1) > 0, f(1) = f(2) = 0$, 证明: 必存在 $\xi \in (1,2)$, 使 $f''(\xi) < 0$

证明: 由 $f'_+(1) > 0$, 则存在 $\mu \in (1,2), f(\mu) > f(1)$, 由拉格朗日中值定理

$$\text{存在 } \xi_1 \in (1, \mu), \text{ 使 } f'(\xi_1) = \frac{f(\mu) - f(1)}{\mu - 1} > 0, \text{ 存在 } \xi_2 \in (\mu, 2), \text{ 使 } f'(\xi_2) = \frac{f(\mu) - f(2)}{\mu - 2} < 0,$$

$$\text{再由拉格朗日中值定理存在 } \xi \in (\xi_1, \xi_2), \text{ 使 } f''(\xi) = \frac{f'(\xi_1) - f'(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} < 0.$$

4. 设函数 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A$, (A 为有限值).

试证: 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

证明:

$$\text{令 } F(x) = \begin{cases} f(x), & a < x < b \text{ 时} \\ A & x = a \text{ 和 } x = b \text{ 时} \end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 内可导,

且 $F'(x) = f'(x), x \in (a,b)$

且 $F(a) = F(b) = A$

即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件,

则至少存在 $\xi \in (a,b)$ 使

$$F'(\xi) = 0, \text{ 而 } F'(\xi) = f'(\xi)$$

即 $f'(\xi) = 0, \xi \in (a,b)$.

5. 设 $F(x) = (x-1)f(x)$, 其中 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 具有一阶连续导数, 在 $(1,2)$ 内二阶可导, 且 $f(1) = f(2) = 0$, 试证明存在 $\xi \in (1,2)$ 使 $F''(\xi) = 0$.

证明: 因 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 具有一阶连续导数,

在 $(1, 2)$ 内二阶可导,

则 $F(x)$ 在 $[1, 2]$ 具有一阶连续导数, 在 $(1, 2)$ 内二阶可导,

因 $F(1) = F(2) = 0$ (因 $f(2) = 0$).

则 $F(x)$ 在 $[1, 2]$ 上满足罗尔定理条件, 则至少存在 $\xi_1 \in (1, 2)$ 使 $F'(\xi_1) = 0$

又 $F'(x) = f(x) + (x-1)f'(x)$

而 $f(1) = 0$, 则 $F'(1) = 0$

$F'(x)$ 在 $[1, \xi_1]$ 上满足罗尔定理条件, 则至少存在 $\xi \in (1, \xi_1) \subset (1, 2)$ 使 $F''(\xi) = 0$

即存在 $\xi \in (1, 2)$ 使 $F''(\xi) = 0$.

6. 若函数 $f(x)$ 在 $[x_0, x_3]$ 上具有三阶导数, 且 $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$,

其中 $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ 证明: 在 (x_1, x_3) 内至少有一点 ξ , 使得 $f'''(\xi) = 0$.

证明: 因 $f(x)$ 在 $[x_0, x_3]$ 上具有三阶导数,

且 $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$

则 $f(x)$ 分别在 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3]$ 上满足罗尔定理的条件

则至少存在 $\xi_1 \in (x_0, x_1), \xi_2 \in (x_1, x_2), \xi_3 \in (x_2, x_3)$, 使 $f'(\xi_i) = 0$ ($i = 1, 2, 3$)

又 $f'(x)$ 分别在 $[\xi_2, \xi_3], [\xi_1, \xi_2]$ 上满足罗尔定理的条件, 则至少存在 $c_1 \in (\xi_2, \xi_3)$

$c_1 \in (\xi_1, \xi_2)$, 使 $f''(c_1) = f''(c_2) = 0$

又 $f''(x)$ 在 $[c_1, c_2]$ 上满足罗尔定理的条件, 则至少存在 $\xi \in (c_1, c_2) \subset (x_0, x_3)$, 使 $f'''(\xi) = 0$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, $f(0) = f(1) = 1, f'(1) = 1$

证明: 在 $(0, 1)$ 内存在点 c , 使 $f''(c) = 2$.

证明: 令 $F(x) = f(x) - x^2$

则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 利用拉格朗日中值定理则至少存在

$\xi \in (0, 1)$ 使 $F'(\xi) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = -1$ (因 $f(0) = f(1) = 1$)

又 $F'(x) = f'(x) - 2x$ 且 $f'(1) = 1$ 即 $F'(1) = -1$

而 $F'(x)$ 在 $[0, 1]$ 上满足罗尔定理条件则至少存在 $c \in (\xi, 1)$ 使

$F''(c) = 0$ 即 $f''(c) = 2$

四、泰勒公式

【例 1】(1) 试写出 $f(x) = \cos x$ 的带拉格朗日型余项的 $2k+1$ 阶的麦克劳林展开式.

$$\text{解: } \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + R_{2k+1}(x)$$

$$R_{2k+1}(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} \cos \xi \cdot x^{2k+2}, \xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}$$

(2) 写出 $f(x) = \ln(1+3x)$ ($|x| < \frac{1}{3}$) 的 n 阶麦克劳林展开式 (不要求写出余项的具体表示式).

$$\text{解 } \ln(1+3x) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{3^3}{3}x^3 - \frac{3^4}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}3^n}{n}x^n + R_n(x)$$

【练习 1】

1. 试写出 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 的带拉格朗日型余项的 n 阶麦克劳林展开式.

$$\text{解: } f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(1+\xi)^{n+2}} x^{n+1}, \xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}$$

2. 求 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在点 $x_0 = 1$ 处的带拉格朗日型余项的 n 阶泰勒展开式, ($0 < x < 2$).

解:

$$f(x) = \frac{1}{x}, f'(x) = \frac{-1}{x^2}, f''(x) = \frac{(-1)(-2)}{x^3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{n+2}}$$

$$f(1) = 1, f'(1) = -1, f''(1) = 2!, f'''(1) = -3!$$

$$f^n(1) = (-1)^n n! \quad f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{\xi^{n+2}}$$

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots + (-1)^n (x-1)^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}} x^{n+1}, \quad \xi \text{ 介于 } 1 \text{ 与 } x \text{ 之间}$$

3. 求 $f(x) = xe^x$ 的 n 阶麦克劳林展开式 (带拉格朗日型余项).

解:

$$f(x) = xe^x, f'(x) = (x+1)e^x, \cdots f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 2, \cdots f^{(n)}(0) = n$$

$$f^{(n+1)}(x) = (x+n+1)e^x$$

$$xe^x = x + x^2 + \frac{1}{2!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{(\xi + n + 1)e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}$$