

第二章 导数与微分

一、导数的概念与应用

【知识 1】 1. 导数的定义 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, 或 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;

导函数定义 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

2. 左右导数 $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$; $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;

3. 导数的几何意义的应用-求切线方程 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

【例 1】(1) 设 $f(x)$ 为可导, 且有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的斜率为 (B)

A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

(2) 设 $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)(x-100)$, 则 $f'(0) =$ (B)

A. 100 B. 100! C. -100 D. -100!

(3) 曲线 $y = \cos x$ 在点 $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$ 处的切线方程为 $y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3})$

【练习 1】

1.(1) 设 $f(x) = (2 + |x|)\sin x$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处 (A)

A. $f'(0) = 2$ B. $f'(0) = 0$ C. $f'(0) = 1$ D. 不可导

(2) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{1 - \cos 2x} = 1$, 其中 $f(0) = 0$, 则 $f'(0) =$ (C)

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

(3) $y = |\sin x|$ 在 $x = 0$ 处 (A)

A. 连续但不可导 B. 可导但不连续 C. 连续且可导 D. 既不可导又不连续

2.(1) 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解: $f(0) = 0$, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ x - \frac{x^3}{6}, & x > 0 \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解: $f(0) = 0$ $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x - 0}{x} = 1$, $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - 0}{x} = 1$
 $f'(0) = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}x^2, & x > 0 \end{cases}$$

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \end{cases}$, 求 $f'_-(0)$ 、 $f'_+(0)$ 及 $f'(x) (x \neq 0)$.

解: $f(0) = 0$, $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

$$f'(x) = \frac{1 + e^{\frac{1}{x}}(1 + \frac{1}{x})}{(1 + e^{\frac{1}{x}})^2} \quad (x \neq 0)$$

3. 求 a, b 的值, 使 $f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \geq 0, \\ ax + b, & x < 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导.

解: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ 得 $b = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{x} = a, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2$$

$\therefore a = 2, b = 1$, 时 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

二、函数的求导

【知识 2】 1. 求导的四则运算、复合函数求导法、反函数求导法

2. 求高阶导数

3. 求隐函数的导数

4. 参数方程求导法

【例 1】 求导的四则运算、复合函数求导法、反函数求导法

(1) 设 $y = \sqrt{x} + \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x+1} + \cos \frac{\pi}{3}$. 求 y' .

$$\text{解: } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

(2) 设 $y = \tan(x + x^2)$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \sec^2(x + x^2) (1 + 2x) dx$

(3) 设 $y = \frac{\sqrt{x}}{x+100}$, $0 < x < 100$, 求反函数的导数 $x'(y)$.

$$\text{解: } y' = \frac{100 - x}{2\sqrt{x}(x+100)^2} \neq 0, 0 < x < 100$$

$$x'(y) = \frac{2\sqrt{x}(x+100)^2}{100 - x} \quad 0 < x < 100$$

【练习 1】

1. 设 $y = \tan x \cdot \ln x - x^2 \cdot 2^x \cdot \sec x + \arctan e$. 求 y' .

$$\text{解: } y' = \sec^2 x \cdot \ln x + \frac{\tan x}{x} - 2x \cdot 2^x \cdot \sec x - x^2 \cdot 2^x \cdot \ln 2 \sec x - x^2 \cdot 2^x \cdot \sec x \cdot \tan x$$

2. 设 $y = 2^{3x} \cdot \ln(2x) - \sqrt{1+x^2}$, 求 y' .

$$\text{解: } y' = 3 \cdot 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot \ln(2x) + \frac{2^{3x}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

3. 设 $y = e^x + \sqrt{3x^2 + 1}$, $x > 0$, 求反函数的导数 $x'(y)$.

$$\text{解: } y' = e^x + \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}} \neq 0, x > 0$$

$$x'(y) = \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{e^x \sqrt{3x^2 + 1} + 3x} \quad x > 0$$

【例 2】 求高阶导数

(1) 设 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 求 y'' .

$$\text{解: } y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y'' = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(2) 设 $y = f(\ln x)$, $f(x)$ 二阶可导, 求 y'' .

解: $y' = f'(\ln x)x^{-1}$

$$y'' = f''(\ln x)x^{-2} - f'(\ln x)x^{-2} = \frac{1}{x^2}[f''(\ln x) - f'(\ln x)]$$

(3) 设 $y = x^3 \sin x$, 求 $y^{(10)}$.

解:

$$y^{(10)} = x^3 \sin(x+5\pi) + 30x^2(x + \frac{9\pi}{2}) + \frac{10 \cdot 9}{2!} \cdot 6x \sin(x+4\pi) + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} \cdot 6 \sin(x + \frac{7}{2}\pi)$$

$$= -x^3 \sin x + 30x^2 \cos x + 270x \sin x - 720 \sin x$$

(4) 设 $\varphi(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e^{tx} - 1)[f(x + \pi^2 t) - f(x)]}{t^2}$, 其中 $f(x)$ 二阶可导, 试求 $\varphi'(x)$.

解: $\varphi(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{tx} - 1}{t} \cdot \frac{f(x + \pi^2 t) - f(x)}{\pi^2 t} \pi^2 = x \cdot f'(x) \cdot \pi^2$

$$\therefore \varphi'(x) = \pi^2 [f'(x) + x f''(x)]$$

【练习 2】

1. 设 $y = e^{2x} f(x^2)$, 其中 $f(u)$ 二阶可导, 求 y'' .

解: $y' = 2e^{2x} f(x^2) + e^{2x} f'(x^2) \cdot 2x = 2e^{2x} [f(x^2) + x f'(x^2)]$

$$\begin{aligned} y'' &= 4e^{2x} [f(x^2) + x f'(x^2)] + 2e^{2x} [2x f'(x^2) + f'(x^2) + 2x^2 f''(x^2)] \\ &= 2e^{2x} [2f(x^2) + (4x+1)f'(x^2) + 2x^2 f''(x^2)] \end{aligned}$$

2. 设 $y = x^2 e^{-x}$, 求 $y^{(10)}$.

解: $y^{(10)} = x^2 (e^{-x})^{(10)} + 10 \cdot (e^{-x})^{(9)} \cdot 2x + \frac{10 \cdot 9}{2!} (e^{-x})^{(8)} \cdot 2$

$$= x^2 e^{-x} - 20x e^{-x} + 90 e^{-x} = e^{-x} (x^2 - 20x + 90)$$

3. 设 $\varphi(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin tx [f(x+t^2) - f(x)]}{t^3}$, 其中 $f(x)$ 二阶可导, 求 $\varphi'(x)$.

解: $\varphi(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t^2)}{t^2} \cdot \frac{\sin tx}{t} = x f'(x)$

$$\therefore \varphi(x) = f'(x) + xf''(x)$$

【例 3】求隐函数的导数

(1) 求方程 $xy=e^{x+y}$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$

解: 方程两边求导数得

$$y + xy' = e^{x+y}(1+y'),$$

$$\text{于是 } (x - e^{x+y})y' = e^{x+y} - y,$$

$$y' = \frac{e^{x+y} - y}{x - e^{x+y}}.$$

(2) 设 $y = \frac{(x+1) \cdot \sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}$, 求 y' .

解: 等式两边取对数得 $\ln y = \ln(x+1) + \frac{1}{3} \ln(x-1) - 2 \ln(x+4) - x$

$$\text{上式两边对 } x \text{ 求导得 } \frac{y'}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{x+4} - 1$$

$$\therefore y' = \frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x} \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{x+4} - 1 \right]$$

(3) 设 $y = x^{\sin x} (x > 0)$, 求 y' .

解: 等式两边取对数得 $\ln y = \sin x \cdot \ln x$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \quad \therefore y' = y(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}) = x^{\sin x} (\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

【练习 3】

1. 若函数 $y = f(x)$ 由方程 $y - e^y \sin x = 1$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$.

$$\text{解 } y' - e^y y' \sin x - e^y \cos x = 0, (1 - e^y \sin x) y' = e^y \cos x, y' = \frac{e^y \cos x}{1 - e^y \sin x}$$

(2) 设曲面 C 的方程为 $x^3 + y^3 = 3xy$, 求过 C 上的点 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ 的切线方程, 并说明曲面 C 在该点的法线方程通过原点.

解: 方程两边对 x 求导 $3x^2 + 3y^2 y' = 3y + 3xy'$, 则 $y' \Big|_{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})} = -1$

所以切线方程为 $x + y - 3 = 0$ 法线方程 $y = x$, 显然通过原点.

2. (1) 设 $y = \frac{(x+1)^2 \sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{x^2+1} \sqrt[3]{(2x+1)^2}}$, 求 y'

解: 两边取对数

$$\ln y = 2 \ln(x+1) + \frac{1}{3} \ln(3x-2) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \frac{2}{3} \ln(2x+1)$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3x-2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2x+1}$$

$$y' = \left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3x-2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2x+1} \right) \frac{(x+1)^2 \sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{x^2+1} \sqrt[3]{(2x+1)^2}}$$

(2) 设 $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 两边取对数得

$$\ln y = x \ln |x| - x \ln |1+x|,$$

两边求导得

$$\frac{1}{y} y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - \ln(1+x) - x \cdot \frac{1}{1+x},$$

于是 $y' = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x \left[\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \right]$.

3. (1) 求由方程 $x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0$ 所确定的隐函数 y 的二阶导数.

解: 在方程的两边分别对 x 求导

$$1 - y' + \frac{1}{2} \cos y \cdot y' = 0, \quad y' = \frac{2}{2 - \cos y}, \quad 0 - y'' + \frac{1}{2} (-\sin y) (y')^2 + \frac{1}{2} \cos y \cdot y'' = 0$$

$$y'' = \frac{-\sin y (y')^2}{2 - \cos y} = \frac{-\sin y \cdot \frac{2^2}{(2 - \cos y)^2}}{2 - \cos y} = \frac{-4 \sin y}{(2 - \cos y)^3}$$

(2) 设 $x^4 - xy + y^4 = 1$, 求 y'' 在点 $(0,1)$ 处的值

解: 方程两边对 x 求导得 $4x^3 - y - xy' + 4y^3y' = 0$

$$\text{代入 } x=0, y=1 \text{ 得 } y' \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = \frac{1}{4};$$

将方程 (1) 两边再对 x 求导得 $12x^2 - 2y' - xy'' + 12y^2(y')^2 + 4y^3y'' = 0$

$$y'' \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = -\frac{1}{16}.$$

【例 4】参数方程求导法

【例 4】求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \sin t}{a - a \cos t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, \quad \therefore \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1 - \cos \frac{\pi}{2}}$$

当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = a(\frac{\pi}{2} - 1)$, $y = a$. 所求切线方程为 $y - a = x - a(\frac{\pi}{2} - 1)$

【练习 4】

1. 求由方程 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ 表示的函数的二阶导数.

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{3a \cos^2 t (-\sin t)} = -\tan t$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{(-\tan t)'}{(a \cos^3 t)'} = \frac{-\sec^2 t}{-3a \cos^2 t \sin t} = \frac{\sec^4 t}{3a \sin t}$$

2. 设参数方程为 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan x \end{cases}$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2} \cdot 2t} = \frac{t}{2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{t}{2}\right)' \cdot \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t}$$

3. 求参数方程 $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$ ($f''(t)$ 存在且不等为零) 所确定函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{f'(t) + tf''(t) - f'(t)}{f''(t)} = t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{f''(t)}$$

三、函数的微分

【例 5】(1) 关于函数在点处连续、可导及可微三者的关系 (B)

- (A) 连续是可微的充分条件
- (B) 可导是可微的充分必要条件
- (C) 可微不是连续的充分条件
- (D) 连续是可导的充分必要条件

(2) 若函数 $f(x)$ 有 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处微分 dy 是 (B)

- (A) 与 Δx 等价的无穷小
- (B) 与 Δx 同阶的无穷小, 但不是等价的无穷小
- (C) 比 Δx 高阶的无穷小
- (D) 比 Δx 低阶的无穷小

(3) 设 $y = \ln(x + e^{x^2})$, 求 dy .

$$\text{解: } \because y' = \frac{1 + 2xe^{x^2}}{x + e^{x^2}},$$

$$\therefore dy = \frac{1 + 2xe^{x^2}}{x + e^{x^2}} dx.$$

【练习 5】

1. 设 $y = f(t)$, $t = \varphi(x)$ 都可微, 则 $dy =$ (A)

- A. $f'(t)dt$
- B. $\varphi'(x)dx$
- C. $f'(t)\varphi'(x)dt$
- D. $f'(t)dx$

2. (1) 设 $y = e^{1-3x} \cos x$, 求 dy .

解: $dy = \cos x \cdot d(e^{1-3x}) + e^{1-3x} \cdot d(\cos x)$

$$\because (e^{1-3x})' = -3e^{1-3x}, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

$$= -e^{1-3x}(3 \cos x + \sin x)dx.$$

(2) 设 $y = e^{-ax} \sin bx$, 求 dy .

解: $dy = e^{-ax} \cdot \cos bx d(bx) + \sin bx \cdot e^{-ax} d(-ax)$

$$= e^{-ax} \cdot \cos bx \cdot bdx + \sin bx \cdot e^{-ax} \cdot (-a)dx$$

$$= e^{-ax}(b \cos bx - a \sin bx)dx.$$

3. 计算 $\cos 60^\circ 30'$ 的近似值.

解: 设 $f(x) = \cos x$, $\therefore f'(x) = -\sin x$, (x 为弧度)

$$\because x_0 = \frac{\pi}{3}, \quad \Delta x = \frac{\pi}{360},$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \cos 60^\circ 30' = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{360}\right)$$

$$\approx \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{360} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{360} \approx 0.4924.$$