

第十二章 无穷级数

一、常数项级数概念与性质

1. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

2. 1) . $\sum_{n=0}^{\infty} u_n, \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛, 且 $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} v_n$

注: 收敛+收敛=收敛; 收敛+发散=发散; 发散+发散不一定发散.

2) . $k \neq 0$ 则 $\sum_{n=0}^{\infty} ku_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 同收同发

3) . $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 加入有限项或去掉有限项, 不改变级数的敛散性.

4) . $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ (收敛的必要条件)

注: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 收敛

3. 常用的结论:

1) 等比级数 (或几何级数) $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \begin{cases} \text{收敛, } |q| < 1, S = \frac{\text{首项}}{1 - \text{公比}}; \\ \text{发散, } |q| \geq 1 \end{cases}$

2) 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

1. 【利用定义法求级数的和】

【例 1】1. 判别级数 $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \cdots$ 的敛散性, 若收敛则求级数的和.

解: 级数部分和 $S_n = \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

$$= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \cdots + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4n+1} \right)$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$, 此即级数收敛, 且其和为 $\frac{1}{4}$.

2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$ 的敛散性; 若收敛则求级数的和.

解: $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, 这是两个公比分别为 $q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{3}$ 的几何级数之和,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ 的和为 } s_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \text{ 的和为 } s_2 = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, \text{ 所以原级数收敛, 和为 } s = s_1 + s_2 = \frac{3}{2}.$$

【练习 1】利用定义法求级数的和

3. 下列级数中不收敛的是 (A).

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{4^n}$

4. 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 是级数收敛的 (C) 条件.

A. 充分 B. 充分且必要 C. 必要 D. 既不充分也不必要

5. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和为 2, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (2u_n - \frac{3}{2^n})$ 的和为 (B).

A. 0 B. 1 C. -2 D. $+\infty$

6. 下列命题中正确的是 (A).

A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散

B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n + v_n$ 发散

C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n + v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛

D. 若数列 $\{u_n\}$ 有界, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

7. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 的敛散性; 若收敛则求级数的和.

解: 该级数一般项 $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$,

所以原级数的前 n 项和为 $S_n = \frac{1}{2} [\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}] = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2n+1})$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}$, 所以该级数收敛, 和为 $\frac{1}{2}$.

8. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2 + 5n + 6}$ 的敛散性, 若收敛求级数的和.

解: $u_n = \frac{8}{n^2 + 5n + 6} = 8(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3})$, $S_n = 8[(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + \cdots + (\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3})] = 8(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3})$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 8 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{8}{3}, \text{ 故级数收敛, 且其和为 } \frac{8}{3}.$$

9. 级数 $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots$ 的和 = _____.

解: $\because u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right).$

$$\begin{aligned} \therefore s_n &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{4}$$

10 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln^n 3}{2^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ 的和 = _____. 答: $\frac{2}{2 - \ln 3}$

2. 【判断级数的发散】

【例 2】11. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ 的敛散性.

解: $s_n = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} \right) = \ln(n+1),$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty, \therefore \text{该级数发散.}$$

12. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{1+n} \right)^n$ 的敛散性.

解: 该级数一般项 $u_n = \left(\frac{n}{1+n} \right)^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1+n}{n} \right)^n \right]^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0,$

不满足级数收敛的必要条件, 故该级数发散.

【练习 2】【判断级数的发散】

13. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 的敛散性.

解: 该级数一般项 $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $S_n = (\sqrt{1+1} - \sqrt{1}) + (\sqrt{2+1} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - 1 = \infty, \text{ 故级数发散.}$$

14. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ 的敛散性, 若收敛求级数的和.

解: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$

$S_n = (\sqrt{1+1} - \sqrt{1}) + (\sqrt{2+1} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - 1 = \infty$, 故级数发散.

15. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2}$ 的敛散性.

解: 该级数一般项 $u_n = \sin \frac{n\pi}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n\pi}{2} \neq 0$, 不满足级数收敛的必要条件, 故该级数发散.

二、正项级数及其审敛法

(一) 正项级数概念

定义: 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (u_n 为常数, $u_n \geq 0$)

定理: 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 有界.

正项级数敛散性判别法

1. 比较判别法:

一般形式: 若 $0 \leq u_n \leq Cv_n$ ($C > 0$), 则 1) $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 收敛. 2) $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ 发散.

极限形式: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 则

1) $0 < l < +\infty$, 这两级数同时收敛同时发散; 2) $l = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 收敛.

3) $l = +\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 发散.

2. 比值审敛法

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则 1) $\rho < 1$, 级数收敛; 2) $\rho > 1$, 级数发散; 3) $\rho = 1$, 本法失效.

3. 根植审敛法

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则 1) $\rho < 1$, 级数收敛; 2) $\rho > 1$, 级数发散; 3) $\rho = 1$, 本法失效.

常用结论:

1) 等比级数 (或几何级数) $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \begin{cases} \text{收敛, } |q| < 1, S = \frac{\text{首项}}{1 - \text{公比}}; \\ \text{发散, } |q| \geq 1 \end{cases}$

2) 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

3) p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$ 时收敛, $0 < p \leq 1$ 时发散.

3. 【利用正项级数敛散性的判别法判断级数的敛散性】

【例3】1. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$ 的敛散性.

解: $u_n = \frac{n+1}{n(n+2)} > \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2} = u_{n+1}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+2} + \cdots$ 发散,

由比较审敛法, 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$ 发散.

2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^6}$ 的敛散性.

解: $u_n = \frac{6^n}{n^6}$, $u_{n+1} = \frac{6^{n+1}}{(n+1)^6}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1}}{(n+1)^6} \cdot \frac{n^6}{6^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^6}{(n+1)^6} = 6 > 1$,

由比值审敛法可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^6}$ 发散.

3. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^{n^2}$ 的敛散性.

解: 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(1 - \frac{1}{n})^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e} < 1$, 故所给级数收敛.

【练习3】正项级数判别法: 充要条件、比较、比值、根值法

4. 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的 (B) 条件.

A. 充分 B. 充分且必要 C. 必要 D. 既不充分也不必要

5. 下列命题中正确的是 (A) .

A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛

B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛

C. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $u_n \geq \frac{1}{n}$

D. 若 $u_n < v_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

6. 设有以下命题: 不正确的是 (C) .

A. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1000}$ 收敛

C. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $u_n \geq v_n (n=1, 2, \dots)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛

D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 不一定都收敛

7. 下列命题中正确的是 (D).

A. 若 $u_n < v_n (n=1, 2, 3, \dots)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

B. 若 $u_n < v_n (n=1, 2, 3, \dots)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

C. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

D. 若 $w_n < u_n < v_n (n=1, 2, 3, \dots)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

8. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则 (C).

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散 B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 发散 C. $\sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)$ 发散 D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + v_n^2)$ 发散

9. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 (D).

A. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 小于 1

B. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 小于等于 1

C. 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在, 其值小于 1

D. 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在, 其值小于等于 1

10. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 下列命题中错误的是 (C).

A. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

B. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

C. 如果 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

D. 如果 $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

11. 判别级数 $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{5} + \dots$ 的敛散性.

解: 因为 $u_n = \frac{2^n}{2n-1}$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{2(n+1)-1}}{\frac{2^n}{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = 2 > 1$, 故所给级数发散.

12. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$ 的敛散性.

解: 因为当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $1 - \cos \frac{\pi}{n} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \sim 2 \left(\frac{\pi}{2n} \right)^2 = \frac{\pi^2}{2n^2}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 为 $p=2>1$ 的 p -级数, 它收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2n^2}$ 也收敛. 故所给级数收敛.

13. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ 的敛散性.

解: 因为 $u_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$, 所以 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{e} < 1$, 此级数收敛.

14. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^n}$ 的敛散性.

解: $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{(2n-1)2^n}{1} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$, $\therefore$ 该级数收敛.

15. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛. 证明下列级数也收敛:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}.$$

解: (1) $\because |a_n b_n| \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛.

(2) $\because (a_n + b_n)^2 = a_n^2 + 2|a_n b_n| + b_n^2$, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 收敛.

(3) 在(1)中取 $b_n = \frac{1}{n}$, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 收敛.

(二) 一般常数项级数

1. 莱布尼兹判别法: 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 满足下面两条件:

$$1) u_{n+1} \leq u_n, n=1, 2, \dots, \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 收敛, 且其和的绝对值小于首项 u_1 .

2. 1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;

2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为条件收敛.

定理: $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

4. 【判断级数绝对收敛、条件收敛】

【例 4】1. 判断下面级数是绝对收敛还是条件收敛, 并写出证明过程.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

$$\text{解: } \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n},$$

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}}{\frac{1}{n \cdot 2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1, \text{ 所以级数 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} \text{ 绝对收敛.}$$

2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性, 若收敛, 则说明是绝对收敛还是条件收敛.

解: 该级数所对应的正项级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, 它是 p-级数, 且 $p = \frac{1}{2} < 1$, 故发散.

但是, 该级数是交错级数, 且满足 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} = u_{n+1} \quad (n=1, 2, \dots)$,

及 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, 于是由交错级数审敛法, 知该级数收敛.

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 为条件收敛.

【练习 4】【判断级数绝对收敛、条件收敛】

3. 判断下面级数是绝对收敛还是条件收敛, 并写出证明过程.

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \cdots$$

解: $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^2}$, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, 因为 $\frac{1}{(2n-1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$,

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 绝对收敛.

4. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n^2}$ 的敛散性, 若收敛, 则说明是绝对收敛还是条件收敛.

解: 由于 $|u_n| = \left| \frac{\sin^2 n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, (n=1, 2, 3, \cdots)$ 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是 $p=2>1$ 的 p -级数, 它是收敛的,

由比较审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin^2 n}{n^2} \right|$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n^2}$ 绝对收敛, 从而原级数收敛.

5. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$ 是否收敛, 若收敛, 指出是绝对收敛还是条件收敛.

解: $\because \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \ln \frac{n+1}{n} \right|$ 发散, 而交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$ 满足 $u_{n+1} \leq u_n, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$,

交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$ 收敛, 所以级数是条件收敛的.

6. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 是否收敛, 若收敛, 指出是绝对收敛还是条件收敛.

解: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \right|$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 满足 (1) $u_{n+1} \leq u_n$, (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = 0$,

交错级数收敛, 故原级数是条件收敛的.

7. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right]$ 的敛散性.

解: $\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, 其中 $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$ 是发散的,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 是交错级数, 满足 $u_n > u_{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 是收敛的, 所以原级数是发散的.

三、幂级数

1.1) 定义 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

2) 公式法求收敛半径 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$

注: 1) 利用此公式时要求 x 的幂级数不能有间隔; 2) 缺项利用比值法或根植法; 3) 或换元法.

2. 幂函数的和函数 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$, 则

1) $s(x)$ 在其收敛域 I 上连续.

2) $s(x)$ 在其收敛域 I 上可积, 并在 I 上有逐项积分公式

$$\int_0^x s(x) dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

且逐项积分后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

3) $s(x)$ 在其收敛区间 $(-R_1, R_1)$ 内可导, 并在 $(-R_1, R_1)$ 内有逐项求导公式

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

且逐项求导后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

5. 【求收敛半径和收敛域】

【例 5】1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \cdot n}$ 的收敛半径及收敛域.

解: $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3^{n+1}(n+1)}}{\frac{1}{3^n n}} = \frac{1}{3}$, 所以 $R = 3$,

当 $x = -3$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, 收敛, 当 $x = 3$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 发散,

收敛域为 $[-3, 3)$.

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ 的收敛域.

$$\text{解: 因为 } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right] = 0 \cdot \frac{1}{e} = 0$$

所以收敛半径 $R = +\infty$, 因此, 该幂级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ 的收敛域.

$$\text{解: 因为 } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty, \quad \text{所以收敛半径 } R = 0,$$

因此, 该幂级数仅在 $x = 0$ 这一个点收敛.

【练习5】【求收敛半径和收敛域】

4. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径及收敛域.

$$\text{解: } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1, \quad \text{有 } R = \frac{1}{\rho} = 1,$$

当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n}{n}$ 发散, 当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛, 所以收敛域为 $(-1, 1]$.

5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{3^n}$ 的收敛半径及收敛域.

$$\text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{3^n}}{\frac{n+1}{3^{n+1}}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 3, \quad \text{于是该级数的收敛半径为 } R = 3,$$

当 $x = 3$ 时, 该级数为 $1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$, 发散,

当 $x = -3$ 时, 该级数为 $-1 + 2 - 3 + \cdots + (-1)^n n + \cdots$, 发散, 所以该级数的收敛区间为 $(-3, 3)$.

6. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}} x^n$ 的收敛域.

$$\text{解: 记 } a_n = (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}}, \quad \text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2, \quad \text{所以收敛半径为 } R = \frac{1}{2},$$

又因为当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 条件收敛; 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}} x^n$ 的收敛域为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

7. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n \cdot n}$ 的收敛域.

解：因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{5^{n+1}(n+1)}}{\frac{1}{5^n \cdot n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5(n+1)} = \frac{1}{5}$ ，所以收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 5$ ，

当 $x = -5$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n} + \cdots$ ，收敛.

当 $x = 5$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ ，发散.

综上所述，该幂级数的收敛域为 $[-5, 5)$.

8. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域 (B).

A. $(4, 6)$

B. $[4, 6)$

C. $(4, 6]$

D. $[4, 6]$

9. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n} x^n$ 的收敛半径是_____.

答： 1.

10. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 4，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ 的收敛半径是_____.

答： 2.

11. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{2n}$ 在处 $x=2$ 条件收敛，则其收敛域为_____.

答： $[0, 2]$.

12. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n}$ 的收敛半径为_____.

答： $\sqrt{3}$.

13. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3^n x^{2n}$ 的收敛半径是_____.

答： $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

6. 【求幂级数的和函数】

【例 6】1. 求幂函数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的收敛区间及和函数

解: $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \therefore$ 收敛半径为 $R=1$, 收敛区间为 $(-1,1)$.

和函数为

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1.$$

2. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 在 $(-1,1)$ 内的和函数.

解: $\because R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1, \therefore$ 收敛半径为 $R=1$, 收敛区间为 $(-1,1)$.

$$\text{设 } s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x t^{n-1} dt \right) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \right) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x), \quad -1 < x < 1.$$

3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

解: 考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$, 它的收敛域为 $(-1,1)$,

$$\text{设其和函数为 } S(x), \text{ 则 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} \right)' = x \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' = \frac{2x}{(1-x)^3} \quad (-1 < x < 1),$$

$$\text{于是 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = 8.$$

【练习 6】【求幂级数的和函数】

4. 求级数 $2x + 4x^3 + 6x^5 + 8x^7 + \cdots$ 的收敛区间, 并求和函数.

解: $2x + 4x^3 + 6x^5 + 8x^7 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1}$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{2(n-1)} \left| \frac{x^{2n+1}}{x^{2n-1}} \right| = x^2 < 1$,

$|x| < 1$, 得收敛半径 $R=1$,

当 $x=1$ 时, 它变成级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2n$ 发散, 当 $x=-1$ 时, 它变成级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} 2n$ 发散,

所以收敛区间为 $(-1, 1)$. 因为 $x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots = \frac{x^2}{1-x^2} \quad (|x| < 1)$,

上式两边求导数得 $2x + 4x^3 + 6x^5 + 8x^7 + \cdots = \left(\frac{x^2}{1-x^2} \right)'$,

所以 $2x + 4x^3 + 6x^5 + 8x^7 + \cdots = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$.

5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(n+1)x^n$ 在收敛区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x)$, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

解: 考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(n+1)x^n$, 它的收敛域为 $(-1, 1)$, 设其和函数为 $S(x)$, 则

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(n+1)x^n = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n+1} \right)' = x \left(\frac{x^2}{1+x} \right)' = \frac{2x}{(1+x)^3} \quad (-1 < x < 1),$$

$$\text{于是 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{27}.$$

6. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数 $S(x)$.

解: 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛域为 $(-1, 1)$, 设其和函数为 $S(x)$,

$$\text{则 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1),$$

7. 求级数 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots$ 的收敛区间, 并求和函数.

解: 可求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的收敛域为 $(-1, 1)$, 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$,

$$\text{逐项求导, 得 } f'(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^2},$$

$$\text{积分, 得 } f(x) = \int_0^x f'(x) dx = \int_0^x \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},$$

$$\text{即 } x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

8. 求级数 $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ 的收敛区间, 并求和函数.

$$\text{解: } x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \text{ 由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} \left| \frac{x^{2n+1}}{x^{2n-1}} \right| = x^2 < 1,$$

$|x| < 1$, 得收敛半径 $R = 1$,

当 $x = 1$ 时, 它成为交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 收敛, 当 $x = -1$ 时, 它成为交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ 收敛,

所以收敛区间为 $[-1, 1]$. 因为 $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2}$ ($|x| < 1$), 上式两边同时积分, 得

$$\int_0^x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots) = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx, \text{ 所以 } x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \arctan x.$$

9. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 在其收敛域内的和函数.

解: 因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, 所以收敛半径 $R = 1$,

当 $x = -1$ 时, 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ 收敛; 而当 $x = 1$ 时, 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散.

于是, 该幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$. 设和函数为 $S(x)$, 即 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, 显然 $S(0) = 1$.

由于 $xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$, 应用和函数的可导性, 逐项求导得, $[xS(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ($-1 < x < 1$),

易知, 当 $-1 < x < 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, 所以 $[xS(x)]' = \frac{1}{1-x}$,

两边积分, 得 $xS(x) = -\ln(1-x)$, 于是, 当 $x \neq 0$ 时, $S(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$, 当 $x = 0$ 时, 可由

$S(0) = a_0 = 1$ 得出, 也可由和函数的连续性得出 $S(0) = \lim_{x \rightarrow 0} S(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x} \ln(1-x) \right] = 1$.

从而所求幂级数的和函数为 $S(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{当 } 0 < |x| < 1 \\ 1 & \text{当 } x = 0 \end{cases}$.

10. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$ 的和函数.

解: 令 $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, 则 $S_1(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 且 $S(x) = xS_1(x)$. 任给 $x \in [-1, 1]$, 由逐项求导公式得,

$$S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, x \in (-1, 1),$$

因此, $S_1(x) = S_1(x) - S_1(0) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x), x \in (-1, 1)$, 所以, $S(x) = xS_1(x) = -x \ln(1-x)$,

当 $x = -1$ 时, $S(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [-x \ln(1-x)] = \ln 2$, 故 $S(x) = -x \ln(1-x), x \in [-1, 1)$.

11. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的和函数.

解: 可求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的收敛域为 $(-1, 1)$, 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{13}}{13} + \cdots$,

逐项求导, 得 $f'(x) = x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots = \frac{x^4}{1-x^4}$, 积分, 得

$$f(x) = \int_0^x f'(x) dx = -\int_0^x \left(1 - \frac{1}{1-x^4} \right) dx = -x + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x,$$

$$\text{即 } \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{13}}{13} + \cdots = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x, x \in (-1, 1).$$

12. 求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解: 考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, 则其收敛域为 $[-1, 1]$,

若记其和函数为 $S(x)$, 则 $S(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$,

$$\text{由于 } S(x) = S(x) - S(0) = \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x, x \in (-1, 1),$$

又因为 $S(x) \in C[-1, 1]$, 所以 $S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan x = \frac{\pi}{4}$, 故 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

13. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ 的和.

解: 由于 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 对上式两边求导, 得 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1}$,

所以 $xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n$, 此式两边再求导, 得 $xe^x + e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1}$,

四、函数展成幂级数及其幂级数的应用

1. (1) 泰勒中值定理:

若 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内具有 $n+1$ 阶的导数, 则 $\forall x \in U(x_0)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \text{ 此公式称为 } n \text{ 阶泰勒公式;}$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ 介于 x_0 与 x 之间), 称为拉格朗日型余项.

$$\text{麦克劳林公式: } f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

$$(2) \text{ 泰勒级数 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n; \text{ 麦克劳林级数 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

$$(3) \text{ 定理: 函数 } f(x) \text{ 能展成泰勒级数} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

2. 常用的幂级数展开式

$$1. \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$2. \quad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + \cdots \quad x \in (-1, 1]$$

$$3. \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$4. \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \cdots \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$5. \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad x \in (-1, 1)$$

$$6. \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad x \in (-1, 1)$$

$$7. \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots \quad x \in (-1, 1)$$

7. 【间接法函数展成幂级数】

【例7】1. 将函数 $f(x) = \frac{1}{3-x}$ 在 $x=1$ 处展开成幂级数.

解: 因为 $\frac{1}{3-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}$, $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1)$,

所以 $\frac{1}{3-x} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n, -1 < \frac{x-1}{2} < 1$, 则 $\frac{1}{3-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (x-1)^n, (-1 < x < 3)$.

【练习7】 【间接法函数展成幂级数】

2. 将函数 $f(x) = \frac{1}{5-x}$ 展开为 $(x-2)$ 的幂级数, 并指出其收敛域.

解: 因为 $f(x) = \frac{1}{5-x} = \frac{1}{3-(x-2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-2}{3}}$, 由于 $\frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+\cdots \quad (-1 < t < 1)$,

所以 $\frac{1}{5-x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-2}{3}} = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{x-2}{3} + \left(\frac{x-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{x-2}{3}\right)^n + \cdots \right]$,

由 $\left| \frac{x-2}{3} \right| < 1$, 得 $-3 < x-2 < 3$, 即 $-1 < x < 5$, 故函数 $f(x)$ 的幂级数的收敛域为 $(-1, 5)$.

3. 将 $\frac{1}{x}$ 展开为 $(x-2)$ 幂级数.

解: $\frac{1}{x} = \frac{1}{2+x-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-2}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-2}{2}\right)^n, \quad -1 < \frac{x-2}{2} < 1$,

故 $\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-2)^n, \quad (0 < x < 4)$.

4. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

解: $f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{2+(x-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}$, 当 $\left| \frac{x-2}{2} \right| < 1$, 即 $0 < x < 4$ 时,

$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} (x-2)^n, x \in (0, 4)$.

5. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$ 展开为 $(x+1)$ 的幂级数.

解: 因为 $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right)$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x+1}{4}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x+1}{2}} \right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x+1}{2}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x+1}{4}},$$

由于

$$\frac{1}{1 - \frac{x+1}{2}} = 1 + \frac{x+1}{2} + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x+1}{2}\right)^n + \cdots \quad \left(\left|\frac{x+1}{2}\right| < 1\right),$$

且 $\frac{1}{1 - \frac{x+1}{4}} = 1 + \frac{x+1}{4} + \left(\frac{x+1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x+1}{4}\right)^n + \cdots \quad \left(\left|\frac{x+1}{4}\right| < 1\right),$

因此, 得 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$ 的幂级数展开式为 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}} \right) (x+1)^n,$

由 $\left|\frac{x+1}{2}\right| < 1$, 得 $-3 < x < 1$; 由 $\left|\frac{x+1}{4}\right| < 1$, 得 $-5 < x < 3$, 其交集为 $-3 < x < 1$,

故函数 $f(x)$ 的幂级数的收敛域为 $(-3, 1)$.

6. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$ 展开成 x 的幂级数.

解: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{3+x} \right), \quad \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n, \quad |x| < 1,$

$$\frac{1}{3+x} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{3}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n, \quad \left|\frac{x}{3}\right| < 1, \quad \frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n, \quad |x| < 1.$$

7. 将函数 $f(x) = e^{2x}$ 展开成 x 的幂级数.

解: 令 $y = 2x$, $e^y = 1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \cdots + \frac{1}{n!}y^n + \cdots$, 把 y 换成 $2x$,

$$\text{得 } e^{2x} = 1 + 2x + \frac{1}{2!}(2x)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(2x)^n + \cdots = 1 + 2x + \frac{2^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{2^n}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

8. 将函数 $\sin^2 x$ 展开为 x 的幂级数.

解: 因为 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, 将 $\cos x$ 的展开式中的 x 换成 $2x$, 有

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad (-\infty < x < +\infty),$$

于是得 $\sin^2 x$ 的幂级数展开式为

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \left[\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \cdots \right], \quad (-\infty < x < +\infty).$$

9. 将函数 $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ 展开成 x 的幂级数.

$$\text{解: 令 } y = \frac{x}{2}, \quad \sin y = y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n-1)!}y^{2n-1} + \cdots,$$

$$\text{把 } y \text{ 换成 } \frac{x}{2}, \text{ 得 } \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3!2^3}x^3 + \frac{1}{5!2^5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!2^{2n+1}}x^{2n+1} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

10. 将 $f(x) = \arctan x$ 展开成麦克劳林级数.

$$\text{解: } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2} + \cdots \quad (-1 < x < 1),$$

$$\begin{aligned} f(x) = \arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^x [1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2} + \cdots] dx \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

11. 试将函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 在点 $x_0 \neq 0$ 处展开成泰勒级数.

$$\text{解: 因为 } \frac{1}{x^2} = -\left(\frac{1}{x}\right)', \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-x_0}{x_0}}, \text{ 而 } \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\text{所以 } \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-x_0)^n}{x_0^n}, \quad x \in (0, 2x_0), \quad \frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n(x-x_0)^{n-1}}{x_0^{n+1}}, \quad x \in (0, 2x_0).$$

12. 求函数 $f(x) = xe^x$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开式.

解: 已知 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ ($x \in (-\infty, +\infty)$), 所以

$$xe^x = e[(x-1)e^{x-1} + e^{x-1}] = e \left[(x-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n \right] = e \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right) (x-1)^n \right].$$

五、傅里叶级数

名称	主要内容	
傅里叶级数 (周期 2π)	$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$	
傅里叶系数 (周期 2π)	$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots)$	
	$f(x)$ 为奇函数	$f(x)$ 为偶函数
	$a_n = 0, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$	$b_n = 0, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$
狄利克雷收敛定理	$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为连续点} \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & x \text{ 为间断点} \end{cases}$	

名称	主要内容	
傅里叶级数 (周期 $2l$)	$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l})$	
傅里叶系数 (周期 $2l$)	$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$	
	$f(x)$ 为奇函数	$f(x)$ 为偶函数
	$a_n = 0, a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$	$b_n = 0, b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$
狄利克雷收敛定理	$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 连续点} \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & x \text{ 为间断点} \end{cases}$	
复数形式	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{l} x}, \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi}{l} x} dx$	

8. 【求傅里叶级数】

1. $f(x)$ 是以周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi]$ 的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}, \quad f(x) \text{ 的傅立叶级数的和函数为 } S(x), \text{ 则 } S(\pi) = (\quad A \quad).$$

A. $-\frac{\pi}{2}$

B. $-\pi$

C. 0

D. 其它值

【练习 8】 【求傅里叶级数】

2. 设在区间 $(0, \pi)$ 内, $f(x) = \frac{\sin x}{\pi x - x^2}$, 若 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 π 为周期的傅立叶级数展开式的和函数,

则 $S(2\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答: $S(2\pi) = \frac{1}{\pi}.$

3. 周期为 2 的函数 $f(x) = x^2 + 1, (-1 \leq x < 1)$, 且 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, (-\infty < x < +\infty)$, 则 $a_0 = \underline{\hspace{2cm}}$.

答: $\frac{8}{3}.$

4. 设函数 $f(t)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 内的表达式为

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < \pi \end{cases}, \quad \text{将 } f(t) \text{ 展开为傅里叶级数, 并讨论其收敛性.}$$

解: 将 $f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < \pi \end{cases}$ 代入傅里叶系数公式, 得

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 dt + \int_0^{\pi} 1 dt \right] = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos nt dt = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nt dt = -\frac{1}{n\pi} (\cos n\pi - 1)$$

$$= -\frac{1}{n\pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{2}{n\pi} & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases},$$

所以函数在 $t \neq n\pi, t \neq 0 (n \in \mathbb{Z})$ 处的展开式为

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right), \quad (-\infty < t < +\infty, t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

因 $f(-\pi+0) \neq f(\pi-0)$, 所以傅里叶级数在 $(-\pi, \pi)$ 内收敛于和 $f(t)$,

在端点不连续, 收敛于 $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.

5. 将函数 $f(x) = x$, $(0 \leq x \leq \pi)$ 展开成正弦级数.

解: 将 $f(x)$ 进行奇式延拓. 于是, 有

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} x \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right] \bigg|_0^{\pi} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

所以, 函数 $f(x) = x$ 展开成正弦级数为 $x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx \quad (0 \leq x \leq \pi)$.

6. 将函数 $f(x) = x \quad (0 \leq x \leq \pi)$ 展开余弦级数.

解: 将 $f(x)$ 进行偶式延拓, 于是, 有

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{1}{n^2} \cos nx \right] \bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, \dots \\ -\frac{4}{n^2 \pi} & n = 1, 3, \dots \end{cases}, \end{aligned}$$

所以, 函数 $f(x) = x$ 展开成余弦级数为

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

7. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 且 $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$, 写出 $f(x)$ 的傅里叶级数与其和函数, 并

求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和.

解: 根据傅里叶系数的计算公式, 得

$$\begin{aligned}
 a_n &= \int_0^2 f(x) \cos n\pi x dx \\
 &= \int_0^1 x \cos n\pi x dx \\
 &= \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),
 \end{aligned}$$

$$a_0 = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \int_0^2 f(x) \sin n\pi x dx \\
 &= \int_0^1 x \sin n\pi x dx \\
 &= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),
 \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数为 $\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \cos n\pi x + (-1)^{n+1} \sin n\pi x \right]$,

其和函数的周期为 2, 且 $S(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$,

$$\text{令 } x = 0, \text{ 得 } S(0) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \right] = \frac{1}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2 \pi^2},$$

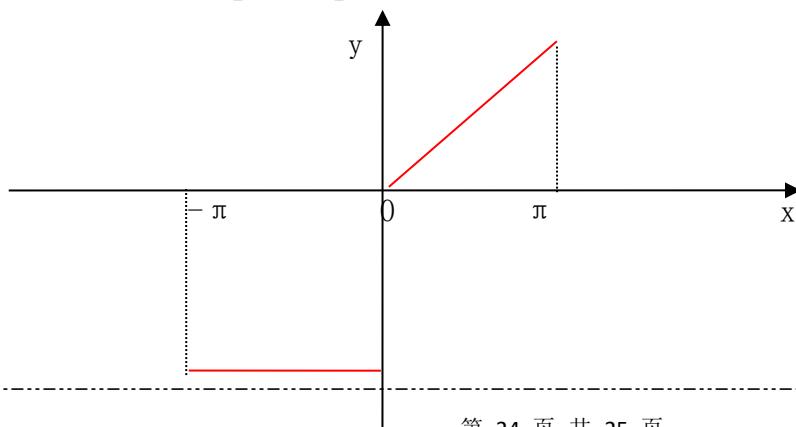
$$\text{且 } S(0) = 0, \text{ 所以 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -\pi & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$, 不具体将 $f(x)$ 展为傅里叶级数,

回答下述问题:

- (1) $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi, \pi]$ 中是否收敛;
- (2) $f(x)$ 的傅里叶级数在 $-\pi, -1, 0, 1$ 处的和分别等于多少?

解: 作出函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图象, 如图



$\because$ 函数满足狄里克雷条件,

$\therefore f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi, \pi]$ 中收敛.

又 $\because x=-1, 1$ 是连续点,

$$\therefore s(-1) = f(-1) = -\pi,$$

$$s(1) = f(1) = 1,$$

又 $\because x=0$ 是间断点,

$$\therefore s(0) = \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{-\pi + 0}{2} = -\frac{\pi}{2},$$

$$s(-\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0.$$

9. 将函数 $f(x) = x, \quad -\pi \leq x < \pi$ 展开为傅氏级数.

解: 先将 $f(x)$ 以 2π 为周期延拓到 $(-\infty, +\infty)$, 显然它满足狄氏条件.

$$\text{由傅氏系数公式, 易知 } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = 0, n = 1, 2, 3 \cdots,$$

且

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] \\ &= -\frac{2}{n} \cos n\pi = -\frac{2}{n} (-1)^n \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2}{n}, \quad n = 1, 2, 3 \cdots, \end{aligned}$$

$$\text{故 } f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx,$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内连续, 而 $f(-\pi+0) \neq f(\pi-0)$,

于是函数 $f(x)$ 的傅氏级数展开式为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx \quad (-\pi < x < \pi).$$