

第十一章 曲线积分与曲面积分

一、对弧长的曲线积分

1. 【第一类曲线积分化为定积分计算】

【例 1.1】 计算 $\int_L (x + \sqrt{y}) ds$, 其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上点 $(0,0)$ 与 $(1,1)$ 之间的一段弧.

解 L 的参数方程为: $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, $ds = \sqrt{1 + (2x)^2} dx$,

$$\text{原式} = \int_0^1 (x + \sqrt{x^2}) \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^1 2x \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 1).$$

【练习 1】对弧长的曲线积分化为定积分

1. 计算曲线积分 $\int_L x ds$, 其中 $L: x = t^3, y = t, 0 \leq t \leq 1$.

解 曲线 L 的参数方程为: $x = t^3, y = t, t$ 作参数, $0 \leq t \leq 1$.

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{9t^4 + 1} dt, \text{ 于是}$$

$$\int_L x ds = \int_0^1 t^3 \sqrt{9t^4 + 1} dt = \frac{1}{36} \int_0^1 (9t^4 + 1)^{\frac{1}{2}} d(9t^4 + 1) = \frac{1}{36} \cdot \frac{2}{3} (9t^4 + 1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{54} (10\sqrt{10} - 1).$$

2. 计算 $\int_{\Gamma} \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds$, 其中 Γ 为螺线: $x = a \cos t, y = a \sin t, z = at$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

解 由于 $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + a^2} dt = a\sqrt{2} dt$,

$$\int_L \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds = \int_0^{2\pi} \frac{a^2 t^2}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} a\sqrt{2} dt = \int_0^{2\pi} a\sqrt{2} t^2 dt = \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi^3 a.$$

3. 曲线 $\Gamma: x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3$, 计算 Γ 上从 $O(0,0,0)$ 到 $A(3,3,2)$ 的一段弧的弧长.

解 曲线 Γ 由参数式给出, 参数 t 从 0 变到 1,

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt = \sqrt{3^2 + (6t)^2 + (6t^2)^2} dt = 3\sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} dt,$$

由弧长的计算公式, 有 $L = \int_{\Gamma} ds = \int_0^1 3\sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} dt = \int_0^1 3(1 + 2t^2) dt = 5$.

2. 【利用函数定义在曲线上和被积函数为“1”化简计算】

【例 1.2】 计算曲线积分 $\int_L (x + y) ds$, 其中 L 为连接 $(1,0)$ 与 $(0,1)$ 两点的直线段.

解 直线 L 的方程是 $x + y = 1$, 选择 x 作参数, 则 $y = 1 - x, x$ 从 0 到 1.

$$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = \sqrt{2} dx.$$

故 $\int_L (x + y) ds = \int_0^1 1 \cdot \sqrt{2} dx = \sqrt{2}$.

【练习 2】利用函数定义在曲线上和被积函数为“1”化简计算

1. 计算曲线积分 $\int_L (|x| + |y|)^n ds$, 其中 $L: |x| + |y| = 1$.

解 因为积分曲线 $L: |x| + |y| = 1$, 所以

$$\int_L (|x| + |y|)^n ds = \int_L 1 ds = L \text{ 的长度} = 4\sqrt{2}.$$

2. 计算曲线积分 $\oint_L (x^2 + y^2)^n ds$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = R^2$.

解 因为积分曲线 L 为圆周 $x^2 + y^2 = R^2$, 所以

$$\oint_L (x^2 + y^2)^n ds = \oint_L (R^2)^n ds = R^{2n} \oint_L ds = R^{2n} \times L \text{ 的弧长} = 2\pi R^{2n+1}.$$

3. 计算对弧长的曲线积分 $\int_L (x + y)^n ds$, 其中 L 为连接 $(a, 0)$ 及 $(0, a)$ 两点的直线段.

解 在 L 上恒有 $x + y = a$, 所以 $\int_L (x + y)^n ds = \int_0^a a^n \sqrt{2} dx = \sqrt{2} a^{n+1}$.

3. 【利用函数的奇偶性和积分线段的对称性】

【例 1.3】 计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} x^2 ds$, 其中 Γ 为圆 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.

解 因为空间曲线 Γ 为圆 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, 具有对称性, 所以

$$\oint_{\Gamma} x^2 ds = \oint_{\Gamma} y^2 ds = \oint_{\Gamma} z^2 ds.$$

于是 $\oint_{\Gamma} x^2 ds = \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} ds = \frac{1}{3} \times \Gamma \text{ 的长度} = \frac{2\pi}{3}$.

【练习 3】利用函数的奇偶性和积分线段的对称性

1. 计算曲线积分 $\oint_L (4x^2 + 3y^2 + 16xy) ds$, 其中 $L: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$, A 为该椭圆的周长.

解 由第一类曲线积分的性质, 有

$$\oint_L (4x^2 + 3y^2 + 16xy) ds = \oint_L (4x^2 + 3y^2) ds + \oint_L 16xy ds,$$

其中 $\oint_L (4x^2 + 3y^2) ds = \oint_L 12 ds = 12A$; 而积分 $\oint_L 16xy ds$ 中被积函数 $16xy$ 关于变量 x 是奇函数, 积分曲线关于 y 轴对称, 有 $\oint_L 16xy ds = 0$.

故 $\oint_L (4x^2 + 3y^2 + 16xy) ds = 12A$.

2. 计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z) ds$, 其中 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.

解 由第一类曲线积分的性质, 有

$$\oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z) ds = \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds - \oint_{\Gamma} (x + y + z) ds,$$

而积分曲线 Γ 是两曲面的交线, 两方程 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 和 $x + y + z = 0$ 必须同时满足, 所以

$$\oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds = \oint_{\Gamma} R^2 ds = R^2 \times \Gamma \text{ 的长度} = 2\pi R^3;$$

$$\oint_{\Gamma} (x + y + z) ds = \oint_{\Gamma} 0 ds = 0,$$

于是 $\oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z) ds = 2\pi R^3$ 。

二、对坐标的曲线积分

1. 第二类曲线积分

1). 平面曲线: $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$

2). 空间曲线: $\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$

注: 被积函数是定义在曲线上的.

2. 常用的性质

1). $\int_{L^+} = - \int_{L^-}$ 其中 L^+ 表曲线的某一方向(正向), L^- 表曲面的另一方向(负向)

2). 若 $L = L_1 + L_2$, 则 $\int_L = \int_{L_1} + \int_{L_2}$

3. 计算:

1). $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, 起点 $t = \alpha$, 终点 $t = \beta$, 其中 $x(t), y(t)$ 具有一阶连续的导数, 则

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\} dt$$

2). $\Gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, 起点 $t = \alpha$, 终点 $t = \beta$, 其中 $x(t), y(t), z(t)$ 具有一阶连续的导数, 则

$$\int_{\Gamma} P dx = \int_{\alpha}^{\beta} P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) dt$$

$$\int_{\Gamma} Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) dt$$

$$\int_{\Gamma} R dz = \int_{\alpha}^{\beta} R[x(t), y(t), z(t)]z'(t) dt$$

【例 2.1】 计算 $\int_L xy dx$, 其中 L 为抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $A(1, -1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段弧。

解 选 y 作参数, 曲线 L 的参数方程为 $x = y^2$, y 从 -1 变到 1 。因此

$$\int_L xy dx = \int_{-1}^1 y^2 \cdot y \cdot 2y dy = 2 \int_{-1}^1 y^4 dy = 2 \left[\frac{y^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{5}.$$

【练习 1】第二类曲线积分化为定积分计算

1. 计算曲线积分 $\int_L 2xy dx + x^2 dy$, 其中 L 为抛物线 $y = x^2$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段弧.

解 $L: y = x^2, x$ 从 0 变到 1, $\int_L 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x) dx = x^4 \Big|_0^1 = 1;$

2. 计算曲线积分 $\oint_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ (按逆时针方向).

解 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, t$ 从 0 变到 2π .

$$\begin{aligned} \text{于是 } & \oint_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2} [a(\cos t + \sin t)(-a \sin t) - a(\cos t - \sin t)(a \cos t)] dt = -2\pi. \end{aligned}$$

3. 计算曲线积分 $\int_L x dy - 2y dx$, 其中 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分.

解 令 $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases}, \theta: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\text{所以 } \int_L x dy - 2y dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \cos \theta \cdot \sqrt{2} \cos \theta d\theta - 2\sqrt{2} \sin \theta (-\sqrt{2} \sin \theta) d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

4. 计算曲线积分 $\int_{\Gamma} x dx + y dy + z dz$, 其中 Γ 为从点 $A(1,1,1)$ 到点 $B(2,3,4)$ 的直线段.

解 Γ 的参数方程为 $x = 1+t, y = 1+2t, z = 1+3t, t$ 从 0 变到 1, 所以有

$$\int_{\Gamma} x dx + y dy + z dz = \int_0^1 [(1+t) + (1+2t) \cdot 2 + (1+3t) \cdot 3] dt = \int_0^1 (6+14t) dt = 13.$$

三、格林公式

1. 格林公式: 设 $P(x,y), Q(x,y)$ 及它们的一阶偏导数在闭域 D 上连续, 则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy$$

其中 L 是闭域 D 的边界曲线, 且取正向.

注: 面积公式: $A = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \oint_L x dy = -\oint_L y dx$

2. 曲线积分与路径无关的等价条件

- 1). 域 D 内 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 处处成立.
- 2). 沿域 D 内的任一闭路积分为零, 即 $\oint_L Pdx + Qdy = 0$
- 3). 在域 D 内存在函数 $u(x, y)$, 使 $du(x, y) = Pdx + Qdy$

3. 求原函数的公式:(线积分法)

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy, \quad u(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^x P(x, y)dx.$$

1. 【格林公式及其应用】 1. 闭合、连续; 2. 不闭合, 连续-补线; 3. 闭合, 不连续.

【例 3.1】 $\int_L (x^2 + 2xy)dx + (4x - 2y)dy$, 其中 L 是正向椭圆周 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解 L 是一条闭曲线, L 围成的闭区域关于 x, y 轴对称, 故用格林公式

$$\int_L (x^2 + 2xy)dx + (4x - 2y)dy = \iint_D (4 - 2x)dxdy = 4 \times D \text{ 的面积} - 0 = 4\pi ab.$$

【练习 1】格林公式及其应用-1. 闭合、连续

1. (1) 计算 $\oint_L (x+y)dx + (x-y)dy$, 其中 L 为以逆时针方向绕行的椭圆周 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 曲线积分与路径无关, 有 $\oint_L (x+y)dx + (x-y)dy = 0$

(2) 利用格林公式计算曲线积分 $\oint_L (x^2 y \cos x + 2xy \sin x - y^2 e^x)dx + (x^2 \sin x - 2ye^x)dy$, 其中 L 为正向

星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0)$.

解 由于 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \sin x + x^2 \cos x - 2ye^x = \frac{\partial P}{\partial y}$, 由格林公式

$$\oint_L (x^2 y \cos x + 2xy \sin x - y^2 e^x)dx + (x^2 \sin x - 2ye^x)dy = \iint_D 0dxdy = 0.$$

2. (1) 设 L 为沿 $x^2 + y^2 = R^2$ 逆时针方向一周, 用格林公式计算 $I = \oint_L -x^2 y dx + xy^2 dy = (\quad)$.

$$(A) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 dr \quad (B) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R 4r^3 \sin \theta \cos \theta dr \quad (C) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R R^2 r dr \quad (D) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr$$

(2) 设 L 是 $|y| = 1 - |x|$ 表示的闭曲线的正向。则 $\oint_L 2ydx + xdy = (\quad)$.

(A) 2 (B) -2 (C) 1 (D) 0

3. (1) $\oint_L (2x - y + 4)dx + (3x + 5y - 6)dy$, 其中 L 为三顶点分别为 $(0,0)$ 、 $(3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界曲线.

解 已知 $P = 2x - y + 4$, $Q = 3x + 5y - 6$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$.

$$\begin{aligned} \text{由格林公式, } \oint_L (2x - y + 4)dx + (3x + 5y - 6)dy &= \iint_D [3 - (-1)]dxdy \\ &= 4 \times D \text{ 的面积} = 4 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 12. \end{aligned}$$

(2) 计算曲线积分 $\oint_L (x + 2y)dx + (x - 2y)dy$, 其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = x$ 所围成的区域的正向边界曲线.

解 用格林公式 $\oint_L (x + 2y)dx + (x - 2y)dy = \iint_D (1 - 2)dxdy$

$$= -\iint_D dxdy = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{6}.$$

【例 3.2】 $\int_L (xy + e^x)dx + [x^2 - \ln(1 + y)]dy$, 其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 从点 $A(\pi, 0)$ 到 $O(0, 0)$ 的一段.

解 由于曲线 L 没有构成闭曲线, 因此需补上 x 轴上从原点 $O(0, 0)$ 到点 $A(\pi, 0)$ 的一段直线, 记为 L_1 , L 和 L_1 构成闭曲线.

已知 $P = xy + e^x$, $Q = x^2 - \ln(1 + y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = x$, 由格林公式, 有

$$\begin{aligned} \left(\int_L + \int_{L_1}\right) (xy + e^x)dx + [x^2 - \ln(1 + y)]dy &= \iint_D [2x - x]dxdy = \iint_D xdxdy \\ &= \int_0^\pi xdx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^\pi x \sin x dx = \pi. \end{aligned}$$

而 $\int_{L_1} (xy + e^x)dx + [x^2 - \ln(1 + y)]dy = \int_0^\pi e^x dx = e^\pi - 1$.

于是 $\int_L (xy + e^x)dx + [x^2 - \ln(1 + y)]dy$

$$\begin{aligned} &= \left(\int_L + \int_{L_1}\right) (xy + e^x)dx + [x^2 - \ln(1 + y)]dy - \int_{L_1} (xy + e^x)dx + [x^2 - \ln(1 + y)]dy \\ &= \pi - (e^\pi - 1) = 1 + \pi - e^\pi. \end{aligned}$$

【练习 2】格林公式及其应用-2. 不闭合、连续

1. 计算 $\int_L (x^2 - 2y)dx + (3x + ye^y)dy$, 其中 L 是由直线 $x + 2y = 2$ 上从点 $A(2, 0)$ 到点 $B(0, 1)$ 的一段,

以及圆弧 $x = -\sqrt{1 - y^2}$ 上从点 $B(0, 1)$ 到点 $C(-1, 0)$ 的一段连接而成的定向曲线.

解 为应用格林公式, 添加 x 轴上从点 C 到点 A 的一段有向直线, 使 $L + \overline{CA}$ 构成有向闭曲线.

$$\begin{aligned} & \int_L (x^2 - 2y)dx + (3x + ye^y)dy \\ &= \oint_{L+CA} (x^2 - 2y)dx + (3x + ye^y)dy - \int_{CA} (x^2 - 2y)dx + (3x + ye^y)dy. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \oint_{L+CA} (x^2 - 2y)dx + (3x + ye^y)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_D (3 + 2) dxdy = 5 \times D \text{ 的面积} = 5 \left(1 + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

$$\text{又 } \int_{CA} (x^2 - 2y)dx + (3x + ye^y)dy = \int_{-1}^2 x^2 dx = 3,$$

$$\text{所以 } \int_L (x^2 - 2y)dx + (3x + ye^y)dy = 5 \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) - 3 = \frac{5\pi}{4} + 2.$$

2. 计算 $\int_L (x + e^{\sin y})dy - (y - \frac{1}{2})dx$, 其中 L 是位于第一象限中的直线 $x + y = 1$ 与位于第二象限中的圆弧

$x^2 + y^2 = 1$ 构成的曲线, 方向是由 $A(1,0)$ 到 $B(0,1)$ 再到 $C(-1,0)$.

解: 连接 $\overline{CA}$ 则 $L, \overline{CA}$ 围区域 D ,

$$\because P = -y + \frac{1}{2} \quad Q = x + e^{\sin y}$$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$$

$$\int_{L+\overline{CA}} (x + e^{\sin y})dy - (y - \frac{1}{2})dx = \iint_D 2 dxdy = 2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = 1 + \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_L (x + e^{\sin y})dy - (y - \frac{1}{2})dx &= 1 + \frac{\pi}{2} - \int_{\overline{CA}} (x + e^{\sin y})dy - (y - \frac{1}{2})dx \\ &= 1 + \frac{\pi}{2} - \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dx = 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

3. 计算 $\oint_L \frac{xy^2 dy - x^2 y dx}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 的顺时针方向。

解: L 参数方程为: $x = a \cos t, y = a \sin t, t$ 变化从 2π 到 0

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{2\pi}^0 \frac{a \cos t \cdot a^2 \sin^2 t \cdot a \cos t dt - a^2 \cos^2 t \cdot a \sin t \cdot (-a \sin t) dt}{a^2} \\ &= -2a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot \sin^2 t dt = -\frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = -\frac{1}{2} \pi a^2 \end{aligned}$$

注: 因 L 围的区域内含被积函数不连续的点 $(0,0)$, 故此题不能用格林公式。

【思考题 1】

★★★1. 设 L 是正方形 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 的正向边界, $f(x)$ 是正值连续函数,

$$\text{试证明 } \oint_L -\frac{y}{f(x)} dx + xf(y) dy \geq 2.$$

7. 解 由格林公式 $\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$,

$$P = -\frac{y}{f(x)}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{f(x)}; \quad Q = xf(y), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = f(y),$$

$$\oint_L -\frac{y}{f(x)} dx + xf(y) dy = \iint_D [f(y) + f^{-1}(x)] dx dy \geq 2 \iint_D dx dy = 2.$$

(因为 $f(x)$ 是正值连续函数)

2. 【验证曲线积分与路径无关, 并计算曲线积分】

【例 3.2】验证曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (1-2xy-y^2)dx - (x+y)^2 dy$ 在整个 xoy 面内与路径无关, 并计算积分值.

解 $\frac{\partial(1-2xy-y^2)}{\partial y} = -2x-2y = \frac{\partial[-(x+y)^2]}{\partial x}$, 曲线积分与路径无关。于是选择直线 $y=x$ 上从

$(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的积分路径, 于是

$$\begin{aligned} \int_{(0,0)}^{(1,1)} (1-2xy-y^2)dx - (x+y)^2 dy &= \int_0^1 [(1-2x^2-x^2-(2x)^2)]dx \\ &= \int_0^1 (1-7x^2)dx = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

【练习 2】验证曲线积分与路径无关, 并计算曲线积分

1. 验证曲线积分 $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2-y^3)dx + (6x^2y-3xy^2)dy$ 在整个 xoy 面内与路径无关, 并计算积分值.

解 $\frac{\partial(6xy^2-y^3)}{\partial y} = 12xy-3y^2 = \frac{\partial(6x^2y-3xy^2)}{\partial x}$, 曲线积分与路径无关。于是

$$\begin{aligned} \int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2-y^3)dx + (6x^2y-3xy^2)dy &= \int_{(1,2)}^{(3,4)} d(3x^2y^2-xy^3) = (3x^2y^2-xy^3) \Big|_{(1,2)}^{(3,4)} \\ &= 236. \end{aligned}$$

2. 设曲线积分 $\int_L xy^2 dx + yf(x)dy$ 与路径无关, 其中 $f(x)$ 可微, 且 $f(0)=0$

求 $f(x)$, 并计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + yf(x)dy$.

解 已知曲线积分 $\int_L xy^2 dx + yf(x)dy$ 与路径无关, 有 $2xy = yf'(x)$, $\Rightarrow 2x = f'(x)$

$f(x) = x^2 + c$, 又由 $f(0) = 0$, 得 $c = 0$, $f(x) = x^2$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + yf(x)dy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + yx^2 dy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} d\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right) = \frac{1}{2}x^2y^2 \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = \frac{1}{2}$$

3. 设 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 1$, 若 $\int_L yf(x)dx + [f(x) - x^2]dy$ 与积分路径无关, 求函数 $f(x)$.

解: $P(x, y) = yf(x), Q(x, y) = f(x) - x^2$

由题设可知: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 即有: $f'(x) - f(x) = 2x$

$$f(x) = e^{\int dx} \left[\int 2xe^{-x} dx + C \right] = e^x \left[\int 2xe^{-x} dx + C \right] = e^x (-2xe^{-x} - 2e^{-x} + C) = -(2x + 2) + Ce^x$$

由于 $f(0) = 1$ 代入上式得 $C = 3$, 故 $f(x) = 3e^x - 2x - 2$

【思考题 2】

★★★2. 在上半平面内 $f(x, y)$ 具有连续的偏导数, 且对任意的 $t > 0$ 都有

$f(tx, ty) = t^{-2}f(x, y)$, 证明: 在 D 内任意分段光滑的闭曲线都有

$$\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0.$$

证明 $P = yf(x, y), Q = -xf(x, y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -f(x, y) - xf'_x(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y} = f(x, y) + yf'_y(x, y)$,

已知 $f(tx, ty) = t^{-2}f(x, y)$, 两边对 t 求导, $xf'_1(tx, ty) + yf'_2(tx, ty) = -2t^{-3}f(x, y)$

令 $t = 1$, 则有 $xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = -2f(x, y)$, 所以 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 曲线积分与路径无关,

$$\text{故 } \oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0$$

3. 【证明为某二元函数的全微分, 并求原函数】

【例 3.3】验证 $(x + 2y)dx + (2x + y)dy$ 在整个 xoy 面内是某个函数的全微分, 并求出一个函数

$u(x, y)$.

解 $\frac{\partial(2x + y)}{\partial x} = 2 = \frac{\partial(x + 2y)}{\partial y}$, 且一阶偏导数连续,

$$du = (x + 2y)dx + (2x + y)dy = xdx + 2ydx + 2xdy + ydy$$

$$= d\left(\frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2\right),$$

所以 $u = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 + c$ 。

【练习 3】证明为某二元函数的全微分，并求原函数

1. 验证在整个 xoy 面内, $(2x + y^3)dx + (3xy^2 + 4)dy$ 是某个函数 $u(x, y)$ 的全微分, 并求出 $u(x, y)$ 。

解 因为, $P = 2x + y^3$, $Q = 3xy^2 + 4$, 且 $\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在整个 xoy 面内处处成立, 故 $Pdx + Qdy$

是某个函数的全微分。令原点 $O(0,0)$ 为积分起点, 有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x 2xdx + \int_0^y (3xy^2 + 4)dy \\ &= x^2 + xy^3 + 4y。 \end{aligned}$$

2. 验证 $(3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy$ 在整个 xoy 面内是某个函数的全微分, 并求出一个函数 $u(x, y)$ 。

解 因为 $P = 3x^2y + 8xy^2$, $Q = x^3 + 8x^2y + 12ye^y$ 在 xoy 面内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 16xy = \frac{\partial P}{\partial y},$$

所以存在 $u(x, y)$, 使 $du = (3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy$ 成立。

$$\begin{aligned} &\text{又} \quad (3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy \\ &= 3x^2ydx + 8xy^2dx + x^3dy + 8x^2ydy + 12ye^ydy \\ &= ydx^3 + 4y^2dx^2 + x^3dy + 4x^2dy^2 + 12ye^ydy \\ &= d(x^3y + 4x^2y^2) + d(12ye^y - 12e^y), \end{aligned}$$

于是 $u(x, y) = x^3y + 4x^2y^2 - 12e^y + 12ye^y$ 。

四、对坐标的曲面积分

1. 第一类曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$

注意: 被积函数是定义在曲面上的。

2. 计算

$$1). \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy$$

$$2). \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y^2(y, z) + x_z^2(y, z)} dy dz$$

$$3). \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + y_x^2(x, z) + y_z^2(x, z)} dz dx$$

3. 常用的结论 $\iint_{\Sigma} dS =$ 曲面 Σ 的面积

1. 【曲面积分化为二重积分】

【例 4.1】(1). 已知 Σ 是 $z = x^2 + y^2$ 上 $z \leq 1$ 的部分曲面, $\iint_{\Sigma} \sqrt{1 + 4z} dS =$ (B).

(A) π (B) 3π (C) 4π (D) 8π

(2). $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被平面 $z = 1$ 所截下的部分曲面.

解 因为 $\Sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 所以 $dS = \sqrt{2} dx dy$

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS = \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r dr = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.$$

【练习 1】曲面积分化为二重积分

1. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 在 $z \geq h$ 部分, $0 < h < a$, 则 $\iint_{\Sigma} z dS =$ (D).

$$(A) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a^2-h^2} \sqrt{a^2-r^2} \cdot r dr \quad (B) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \sqrt{a^2-r^2} \cdot r dr$$

$$(C) \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\sqrt{a^2-h^2}}^{\sqrt{a^2-h^2}} a \cdot r dr \quad (D) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} a \cdot r dr$$

2. $\iint_{\Sigma} 3z dS$, 其中 Σ 为 $z = 2 - (x^2 + y^2)$ 在 xoy 面上方的部分.

解 $\iint_{\Sigma} 3z dS = 3 \iint_{D_{xy}} [2 - (x^2 + y^2)] \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$

$$= 3 \iint_{D_{xy}} [2 - \rho^2] \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho d\theta = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2 - \rho^2) \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho = \frac{111}{10} \pi.$$

3. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 介于平面 $z = 0$ 与 $z = 1$ 之间的曲面.

解: Σ 在 xoy 面上的投影区域 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\begin{aligned}
 ds &= \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dxdy = \sqrt{2} dxdy \\
 \iint_{\Sigma} (x^2+y^2) ds &= \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2) \sqrt{2} dxdy \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi
 \end{aligned}$$

4. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h$ ($0 < h < a$) 截出的顶部.

解 Σ 的方程为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$,

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy,$$

所以
$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy \\
 &= \iint_D \frac{a\rho}{a^2 - \rho^2} d\rho d\theta = a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \frac{\rho}{a^2 - \rho^2} d\rho = 2\pi a \ln \frac{a}{h}.
 \end{aligned}$$

2. 【几何意义】 $\iint_{\Sigma} k dS = kS(\Sigma)$

【例 4.2】设 Σ 是柱面 $x^2+y^2=R^2$ ($R>0$) 被平面 $z=0, z=h$ 所截部分, 求 $\iint_{\Sigma} (x^2+y^2) dS$.

解 在 Σ 上, 点点满足 $x^2+y^2=R^2$, 所以

$$\iint_{\Sigma} (x^2+y^2) dS = \iint_{\Sigma} R^2 dS = R^2 \times \Sigma \text{ 的面积} = 2\pi h R^3.$$

【练习 2】几何意义 $\iint_{\Sigma} k dS = kS(\Sigma)$

1. 求 $\iint_{\Sigma} y dS$, 其中 Σ 是右半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, y \geq 0$.

解 Σ 表示为 $y = \sqrt{a^2 - x^2 - z^2}$, $D_{xz}: x^2+z^2 \leq a^2$,

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dxdz = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}} dxdz,$$

$$\iint_{\Sigma} y dS = \iint_{D_{xz}} \sqrt{a^2 - x^2 - z^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}} dxdz = a \times D_{xz} \text{ 的面积} = \pi a^3$$

2. $\iint_{\Sigma} (z+2x+\frac{4}{3}y) dS$, 其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分.

解 Σ 在 xoy 面上的投影区域是由 x 轴, y 轴和直线 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 围成的三角形闭区域;

被积函数 $f(x, y, z) = z + 2x + \frac{4}{3}y$, 把 Σ 的方程代入,

$$f(x, y, z) = z + 2x + \frac{4}{3}y = 4;$$

$$\Sigma \text{ 的方程为 } z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y, \quad dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = \frac{\sqrt{61}}{3} dxdy.$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \iint_{\Sigma} (z + 2x + \frac{4}{3}y) dS &= \iint_D 4 \cdot \frac{\sqrt{61}}{3} dxdy = \frac{4}{3} \sqrt{61} \times D \text{ 的面积} \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{61} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 4\sqrt{61}. \end{aligned}$$

3. 【函数的奇数偶数性与对称性、或轮换对称性】

【例 4.3】(1) 求 $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$, 其中 Σ 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$.

解 由对称性, $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \iint_{\Sigma} z dS$,

Σ 表示为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq a^2$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy \\ &= a \times D_{xy} \text{ 的面积} = \pi a^3. \end{aligned}$$

(2) $\oiint_{\Sigma} (x + y + z) dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

解 $\oiint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \oiint_{\Sigma} x dS + \oiint_{\Sigma} y dS + \oiint_{\Sigma} z dS$.

由于球面具有轮换对称性, $\oiint_{\Sigma} x dS = \oiint_{\Sigma} y dS = \oiint_{\Sigma} z dS$, 所以

$$\oiint_{\Sigma} (x + y + z) dS = 3 \oiint_{\Sigma} z dS.$$

又由于球面 Σ 关于 xoy 面对称, 被积函数关于变量 z 是奇函数, 所以 $\oiint_{\Sigma} z dS = 0$, 于是

$$\oiint_{\Sigma} (x + y + z) dS = 0.$$

【练习 3】函数的奇数偶数性与对称性、或轮换对称性

1. 设曲面 Σ 是上半球面: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($z \geq 0$), 曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第五卦限中的部分, 则有 (C).

(A) $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$

(B) $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} y dS$

(C) $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z dS$

(D) $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$

2. 求 $\iint_{\Sigma} (x+y+z)dS$, 其中 Σ 是左半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, y \leq 0$.

解 由对称性, $\iint_{\Sigma} (x+y+z)dS = \iint_{\Sigma} ydS$,

Σ 表示为 $y = -\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}$, $D_{xz}: x^2 + z^2 \leq a^2$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} (x+y+z)dS &= \iint_{D_{xz}} (-\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}} dx dz \\ &= -a \times D_{xz} \text{ 的面积} = -\pi a^3\end{aligned}$$

3. 计算曲面积分 $\iiint_{\Sigma} (x+|y|)dS$, 其中 Σ 为 $|x|+|y|+|z|=1$.

解 Σ 关于原点对称, 也关于 yoz 面对称, $\iiint_{\Sigma} x dS = 0$, (其中 Σ 为 $|x|+|y|+|z|=1$), 并且 $\iiint_{\Sigma} |y| dS =$

$$\frac{1}{3} \iiint_{\Sigma} (|x|+|y|+|z|) dS = \frac{1}{3} \iiint_{\Sigma} dS, \Sigma \text{ 为八面体, 每一块面都是边长为 } \sqrt{2} \text{ 的正三角形, 面积为 } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$S \text{ 的总面积为 } 8 \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}. \text{ 所以 } \iiint_{\Sigma} (x+|y|) dS = \frac{1}{3} \iiint_{\Sigma} dS = \frac{4}{3} \sqrt{3}.$$

4. 计算 $\iint_{\Sigma} z^2 dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

解 由于 Σ 的方程对变量 x, y, z 具有轮换对称性, 则

$$\iint_{\Sigma} z^2 dS = \iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS,$$

$$\text{故 } \iint_{\Sigma} z^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \frac{a^2}{3} \iint_{\Sigma} dS = \frac{a^2}{3} 4\pi a^2 = \frac{4}{3} \pi a^4$$

五、对坐标的曲面积分

【知识 5】1. 第二类曲面积分: 流量 $\Phi = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$

2. 计算: (1) 分面投影法; (2) 合一投影法或点积法; (3) 高斯公式.

1. 分面投影法

【例 5.1】计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x \geq 0, y \geq 0$ 的部分.

解 将 Σ 分为 $\Sigma_1: z_1 = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ 及 $\Sigma_2: z_2 = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 两部分.

Σ_1 取下侧, Σ_2 取上侧。它们在 xoy 面的投影区域均为

$$D_{xy}: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1.$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} xyz dx dy &= \iint_{\Sigma_1} xyz dx dy + \iint_{\Sigma_2} xyz dx dy \\ &= - \iint_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2}) dx dy + \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = 2 \iint_{D_{xy}} r^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1-r^2} r dr d\theta = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

【练习 1】一分面投影法

1. 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dx dy$, Σ 是圆 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq R^2 \\ z = 0 \end{cases}$ 的下侧.

$$\text{解 } I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dx dy = - \iint_D r^2 \cdot r dr d\theta = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = -\frac{\pi}{2} R^4.$$

2. 计算 $\iint_{\Sigma} z dx dy + x dy dz + y dz dx$, 其中 Σ 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 $z = 0$

及 $z = 3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧.

解: 柱面与 xOy 面垂直, 故 $\iint_{\Sigma} z dx dy = 0$,

将 Σ 分别向 yOz, xOz 面投影, 得矩形域

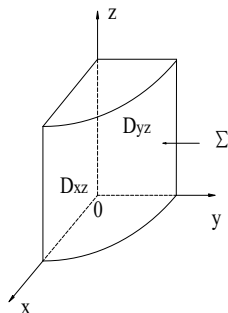
$$D_{yz}: 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 3 \quad (x = 0)$$

$$D_{xz}: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 3 \quad (y = 0)$$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} x dy dz + \iint_{\Sigma} y dz dx = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2} dy dz + \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2} dz dx$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^3 \sqrt{1-y^2} dz + \int_0^1 dx \int_0^3 \sqrt{1-x^2} dz = 2 \cdot 3 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\underline{x = \sin t} \quad 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \pi$$



2. 合一投影法

【例 5.2】 $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中 Σ 是曲面 $z = x^2 + y^2$ 在第一卦限中 $0 \leq z \leq 1$ 部分的下侧.

解 Σ 在 xoy 面的投影区域为 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

用合一投影法计算。

因为 $z = x^2 + y^2$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$ 。得到

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdx dy &= - \iint_{D_{xy}} [x(-2x) + y(-2y) + (x^2 + y^2)] dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{D_{xy}} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

【练习2】-合一投影法

1. $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dz dx + z dx dy$, 其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 上满足 $x \geq 0, y \geq 0, z \leq 1$ 的那一部分的下侧.

解 用合一投影法

因为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1$) 取下侧, Σ 在 xoy 面的投影区域为

$$D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}, \text{ 而 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dz dx + z dx dy &= - \iint_{D_{xy}} [(x^2 + y^2)(-\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}) dz dx + \sqrt{x^2 + y^2}] dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} (y-1)\sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{D_{xy}} (\rho \sin \theta - 1) \rho \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (\rho^3 \sin \theta - \rho^2) d\rho = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

2. $\iint_{\Sigma} (2+z) dy dz + z dx dy$, 其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的部分的下侧.

解 因为 Σ 由一个方程 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$) 表示, 用合一投影法计算.

Σ 在 xoy 面的投影区域为 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 而

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\text{于是 } \iint_{\Sigma} (2+z) dy dz + z dx dy = - \iint_{D_{xy}} [(2 + \sqrt{x^2 + y^2})(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}) + \sqrt{x^2 + y^2}] dx dy$$

$$= - \iint_{D_{xy}} (2 + \sqrt{x^2 + y^2})(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}) dx dy - \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

考察右端第一个积分, D_{xy} 关于 y 轴对称, 被积函数关于变量 x 是奇函数, 故

$$- \iint_{D_{xy}} (2 + \sqrt{x^2 + y^2})(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}) dx dy = 0;$$

再看第二个积分, D_{xy} 在极坐标中表示为 $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

故
$$\iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{D_{xy}} \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{2}{3}\pi.$$

所以
$$\iint_{\Sigma} (2+z) dy dz + z dx dy = 0 - \frac{2}{3}\pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

3. $\iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dy dz + [2f(x, y, z) + y] dz dx + [f(x, y, z) + z] dx dy$, 其中 $f(x, y, z)$ 为连续函数, Σ 是平面 $x - y + z = 1$ 在第四卦限部分的上侧.

解 在 Σ 上, $z = 1 - x + y$. 由于 Σ 取上侧, 所以 Σ 在任意一点处的单位法向量

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1).$$

由两类曲面积分的关系, 有

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dy dz + [2f(x, y, z) + y] dz dx + [f(x, y, z) + z] dx dy \\ &= \iint_{\Sigma} \{[f(x, y, z) + x] \cos \alpha + [2f(x, y, z) + y] \cos \beta + [f(x, y, z) + z] \cos \gamma\} dS \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} \{[f(x, y, z) + x] - [2f(x, y, z) + y] + [f(x, y, z) + z]\} dS \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x - y + z) dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \Sigma \text{ 的面积} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

六、高斯公式

名称	主要内容
高斯公式	设 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在闭域 Ω 上具有一阶连续偏导数, 则 $\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$ 其中 Σ 是闭域 Ω 的边界曲面, 且取外侧.
设向量场 $A(x, y, z) = P(x, y, z) + Q(x, y, z) + R(x, y, z)$	
向量场 A 通过曲面 Σ 流向指定侧的通量	$\Phi = \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$
向量场 A 的散度	$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

【知识 6】 计算 $\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$ $\begin{cases} 1. \text{分面投影法} \\ 2. \text{合一投影法} \\ 3. \text{高斯公式法} \end{cases}$

高斯公式的用法: $\Sigma \begin{cases} 1. \text{封合, 连续} - \text{直接用高斯公式} \\ 2. \text{不封合, 连续} - \text{补面} \\ 3. \text{封闭, 不连续} - \text{挖洞眼} \end{cases}$

1. 闭合且连续

【例 6.1】 计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧.

解 已知, $P = x^3$, $Q = y^3$, $R = z^3$, $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$,

由高斯公式, $\oiint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2) dv = \iiint_{\Omega} 3r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr = 3 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{12}{5} \pi R^5.$$

【练习 1】 闭合且连续-直接用高斯公式

1. (1) 计算 $\oiint_{\Sigma} (x^3 - y^2 z) dydz - 2x^2 y dzdx + xy dxdy$, 其中 Σ 是由坐标面和平面 $x = a$, $y = a$, $z = a$ 所围成的正方体 Ω 的表面的外侧, a 为正数.

解 $\oiint_{\Sigma} (x^3 - y^2 z) dydz - 2x^2 y dzdx + xy dxdy = \iiint_{\Omega} (3x^2 - 2x^2) dv = \int_0^a dz \int_0^a dy \int_0^a x^2 dx = \frac{a^5}{3}.$

(2) 计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} (x - y) dxdy + (y - z) x dydz$, 其中 Σ 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 0$, $z = 3$ 所围成的空间闭区域 Ω 的整个边界曲面的外侧.

解 $P = (y - z)x$, $Q = 0$, $R = x - y$. 有 $\frac{\partial P}{\partial x} = y - z$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial z} = 0$.

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} (x - y) dxdy + (y - z) x dydz &= \iiint_{\Omega} (y - z) dxdydz = 0 - \iiint_{\Omega} z dxdydz \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^3 z dz = -2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = -\frac{9}{2} \pi. \end{aligned}$$

(3) 计算 $\oiint_{\Sigma} x(y^2 + z^2) dydz + x^2 z dxdy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

解 $\oiint_{\Sigma} x(y^2 + z^2) dydz + x^2 z dxdy = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2 + x^2) dv$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^a r^2 (r^2 \sin \varphi) dr = 2\pi \times 2 \times \frac{1}{5} a^5 = \frac{4\pi}{5} a^5.$$

(4) 计算向量 $\vec{A} = x^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + z^3 \vec{k}$ 穿过曲面 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) 流向外侧的流量.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \Phi &= \oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2) dv \\
 &= \iiint_{\Omega} 3r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^a r^4 dr = 3 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{12}{5} \pi a^5.
 \end{aligned}$$

2. (1) $\oiint_{\Sigma} xz dydz + xy dzdx + yz dxdy$ Σ : $x^2 + y^2 = R^2$, $z=0$, $z=h$ 所围成立体表面外侧.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \oiint_{\Sigma} xz dydz + xy dzdx + yz dxdy &= \iiint_{\Omega} (z+x+y) dxdydz = \iiint_{\Omega} z dxdydz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_0^h z dz = 2\pi \cdot \frac{1}{2} R^2 \cdot \frac{1}{2} h^2 = \frac{\pi}{2} R^2 h^2.
 \end{aligned}$$

(2) 计算 $I = \iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + (z-R)^2 = R^2$ 的外侧.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \text{利用高斯公式 } I &= \iiint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy \\
 &= \iiint_{\Omega} (2x+2y+2z) dv = \iiint_{\Omega} 2z dv \quad (\text{利用对称性}) \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r \cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr = \frac{4}{3} \pi.
 \end{aligned}$$

(3) 计算积分 $\oiint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, 其中 Σ 是锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 与平面 $z=h$ 所围空间区域 ($0 \leq z \leq h$) 的表面, 方向取外侧.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \text{利用高斯公式 } \oiint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy \\
 &= \iiint_{\Omega} (2x+2y+2z) dv = \iiint_{\Omega} 2z dv \quad (\text{利用对称性}) \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h r dr \int_r^h 2z dz = \frac{\pi}{2} h^4.
 \end{aligned}$$

(4) 计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} \frac{1}{1+x^2} dydx + \frac{1}{1+y^2} dzdx + \frac{1}{1+z^2} dxdy$, 其中 Σ 为锥面

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的立体的表面外侧.

$$\text{解 } \text{由高斯公式 } I = \iiint_{\Omega} \left[\frac{-2x}{(1+x^2)^2} + \frac{-2y}{(1+y^2)^2} + \frac{-2z}{(1+z^2)^2} \right] dv,$$

$$\text{由对称性, } \iiint_{\Omega} \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dv = \iiint_{\Omega} \frac{-2y}{(1+y^2)^2} dv = 0,$$

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} \frac{-2z}{(1+z^2)^2} dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_0^1 \frac{-2z}{(1+z^2)^2} dz = 2\pi \int_0^1 \rho \frac{1}{1+z^2} \Big|_{\rho}^1 d\rho \\
 &= 2\pi \int_0^1 \rho \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\rho^2} \right) d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{4} \rho^2 - \frac{1}{2} \ln(1+\rho^2) \right]_0^1 = \pi \left[\frac{1}{2} - \ln 2 \right].
 \end{aligned}$$

2. (1) 计算 $I = \oiint_{\Sigma} x(y^2 + z^2) dydz$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧.

解 利用高斯公式 $I = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv$

$$= \frac{1}{3} [\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv + \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2) dv + \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv] \quad (\text{利用对称性})$$

$$= \frac{2}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \frac{2}{3} \iiint_{\Omega} r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr = \frac{2}{3} \times 2\pi \times 2 \times \frac{1}{5} R^5 = \frac{8}{15} \pi R^5.$$

(2) 设 f 具有连续偏导数, 求

$$I = \oiint_{\Sigma} \frac{1}{y+3} f\left(\frac{x+3}{y+3}\right) dydz + \frac{1}{x+3} f\left(\frac{x+3}{y+3}\right) dzdx + z dx dy,$$

其中 Σ 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 及 $z = 8 - x^2 - y^2$ 所围的立体表面的外侧.

解 令 $P = \frac{1}{y+3} f\left(\frac{x+3}{y+3}\right)$, $Q = \frac{1}{x+3} f\left(\frac{x+3}{y+3}\right)$, $R = z$.

$$\text{则} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{y+3} \frac{\partial}{\partial x} \left[f\left(\frac{x+3}{y+3}\right) \right] = \frac{1}{(y+3)^2} f'\left(\frac{x+3}{y+3}\right),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{x+3} \frac{\partial}{\partial y} \left[f\left(\frac{x+3}{y+3}\right) \right] = \frac{-1}{(y+3)^2} f'\left(\frac{x+3}{y+3}\right),$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = 1.$$

因此, 由高斯公式, 得 $I = \iiint_{\Omega} \left[\frac{1}{(y+3)^2} f'\left(\frac{x+3}{y+3}\right) - \frac{1}{(y+3)^2} f'\left(\frac{x+3}{y+3}\right) + 1 \right] dx dy dz = \iiint_{\Omega} dx dy dz$.

而 Ω 在 D_{xy} 上的投影区域为: $x^2 + y^2 \leq 4$,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega} \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{8-\rho^2} dz \\ &= 2\pi \int_0^2 \rho (8 - 2\rho^2) d\rho = 4\pi (2\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4)_0^2 = 16\pi. \end{aligned}$$

(3) 计算 $\oiint_{\Sigma} z dx dy + \frac{1}{x} f\left(\frac{x}{y}\right) dz dx + \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) dy dz$, 其中 $f(u)$ 有连续导数, Σ 是由柱面 $x^2 + y^2 = 4$,

$z = 2y^2$ 及平面 $z = 0$ 所围立体表面内侧.

解 因为 $P = \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right)$, $Q = \frac{1}{x} f\left(\frac{x}{y}\right)$, $R = z$,

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{y^2} f'(\frac{x}{y}) - \frac{1}{y^2} f'(\frac{x}{y}) + 1 = 1,$$

而闭曲面是对内侧积分, 由高斯公式有

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} z dx dy + \frac{1}{x} f(\frac{x}{y}) dz dx + \frac{1}{y} f(\frac{x}{y}) dy dz &= - \iiint_{\Omega} dv = - \iiint_{\Omega} \rho d\rho d\theta dz \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{\rho^2} dz = - 2\pi \int_0^2 \rho^3 d\rho = - 8\pi. \end{aligned}$$

(4) 计算 $\oiint_{\Sigma} [\frac{1}{y} f(\frac{y}{z}) + z^3] dx dy + [\frac{1}{z} f(\frac{y}{z}) + y^3] dz dx + x^3 dy dz$, 其中 $f(u)$ 有连续导数, Σ 是由锥面

$x = \sqrt{y^2 + z^2}$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 所围立体表面外侧.

解 由高斯公式有

$$\begin{aligned} &\oiint_{\Sigma} [\frac{1}{y} f(\frac{y}{z}) + z^3] dx dy + [\frac{1}{z} f(\frac{y}{z}) + y^3] dz dx + x^3 dy dz \\ &= 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = 3 \iiint_{\Omega} r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_1^2 r^4 dr = \frac{9^3}{5} (2 - \sqrt{2}) \pi. \end{aligned}$$

2. 不闭合, 但连续——补面

【例 6.2】计算 $\iint_{\Sigma} (3x - z) dy dz + z dx dy$, 其中 Σ 为有向曲面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$), 其法向量与 z 轴负向的夹角成锐角.

解 设 $\Sigma_1: z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$, 上侧

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (3x - z) dy dz + z dx dy &= \iint_{\Sigma + \Sigma_1} (3x - z) dy dz + z dx dy - \iint_{\Sigma_1} (3x - z) dy dz + z dx dy \\ \iint_{\Sigma + \Sigma_1} (3x - z) dy dz + z dx dy &= \iiint_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dv = \iiint_{\Omega} 4 dv = 4 \int_0^1 \pi z dz = 2\pi, \\ \iint_{\Sigma_1} (3x - z) dy dz + z dx dy &= \iint_D d\sigma = \pi, \\ \text{所以 } \iint_{\Sigma} (3x - z) dy dz + z dx dy &= 2\pi - \pi = \pi. \end{aligned}$$

【练习 2】不闭合, 但连续——补面

1. (1) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} x dy dz + 2y dz dx + 3(z - 1) dx dy$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的下侧.

解 补上平面 $\Sigma_1: z = 1$ ($x^2 + y^2 \leq 1$) 取上侧. 由题设知, $P = x$, $Q = 2y$, $R = 3(z - 1)$,

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 2 + 3 = 6,$$

利用高斯公式 $\left(\iint_{\Sigma} + \iint_{\Sigma_1}\right)xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy = \iiint_{\Omega} 6dv = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$ 。

利用合一投影法计算 $\iint_{\Sigma_1} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy$ 。

因为 $z=1$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 所以 $\iint_{\Sigma_1} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy = 0$ 。

故

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy \\ &= \left(\iint_{\Sigma} + \iint_{\Sigma_1}\right)xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy - \iint_{\Sigma_1} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

(2) 计算 $\iint_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dxdy$, 其中 Σ 上 $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧。

解 补上平面 $\Sigma_1: z=0$ ($x^2+y^2 \leq 4$) 取下侧。而 $P=xy$, $Q=x$, $R=x^2$,

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y + 0 + 0 = y,$$

由高斯公式, 有 $\left(\iint_{\Sigma} + \iint_{\Sigma_1}\right)xydydz + xdzdx + x^2dxdy = \iiint_{\Omega} ydv = 0$ 。

(因为 Ω 关于 xoz 面对称, 被积函数关于变量 y 是奇函数。)

$$\iint_{\Sigma_1} xydydz + xdzdx + x^2dxdy = \iint_{D_{xy}} x^2dxdy,$$

其中 D_{xy} 是圆域 $x^2+y^2 \leq 4$ 。因为 D_{xy} 关于直线 $y=x$ 对称, 所以

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} x^2dxdy &= \iint_{D_{xy}} y^2dxdy = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)dxdy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 \cdot \rho d\rho = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^2 = 4\pi. \end{aligned}$$

2. (1) 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{x^2}{2} dydz + \sin(xz^2) dzdx + z^2 dxdy$, 其中 Σ 为 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 在 $z=0, z=1$ 之间的下侧。

解 补平面 $\Sigma_1: z=1, (x^2+y^2 \leq 1)$ 取上侧, Ω 由 Σ 和 Σ_1 所围成, 取外侧。由高斯公式得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} = \iiint_{\Omega} (x+2z)dv = \iiint_{\Omega} 2zdv = \iiint_{\Omega} 2zrdrd\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr \int_r^1 2zdz$$

$$= 2\pi \int_0^1 r(1-r^2)dr = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{又 } \iint_{\Sigma_1} \frac{x^2}{2} dydz + \sin(xz^2) dzdx + z^2 dxdy = \iint_D dxdy = \pi,$$

$$\text{原积分} = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

(2) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (y^2 - x) dydz + (z^2 - y) dzdx + (x^2 - z) dxdy$, 其中 Σ 为抛物面

$$z = 2 - x^2 - y^2 \text{ 位于 } xoy \text{ 面上方的部分的上侧.}$$

解 补上平面 $\Sigma_1: z=0, (x^2 + y^2 \leq 2)$, 取下侧, $\Sigma + \Sigma_1$ 构成闭曲面, 所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} + \iint_{\Sigma_1} &= \iiint_{\Omega} (-1-1-1)dv = -3 \iiint_{\Omega} dv = -3 \iint_{D_{xy}} dxdy \int_0^{2-x^2-y^2} dz = -3 \iint_{D_{xy}} (2-x^2-y^2) dxdy \\ &= -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2-\rho^2) \rho d\rho = -6\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \iint_{\Sigma_1} (y^2 - x) dydz + (z^2 - y) dzdx + (x^2 - z) dxdy &= - \iint_{D_{xy}} x^2 dxdy = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (\rho \cos \theta)^2 \cdot \rho d\rho \\ &= - \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho = -\pi, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \iint_{\Sigma} (y^2 - x) dydz + (z^2 - y) dzdx + (x^2 - z) dxdy = -6\pi - (-\pi) = -5\pi.$$

3. (1) 计算 $\iint_{\Sigma} (2x + z) dydz + z dxdy$, 其中 Σ 为有向曲面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$), 取上侧.

解 利用高斯公式计算。由于曲面不是闭曲面, 因此补上 $\Sigma_1: z=1$ ($x^2 + y^2 \leq 1$) 取下侧, Σ_1 在

xoy 平面的投影区域为 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则

$$\iint_{\Sigma} (2x + z) dydz + z dxdy = \iint_{\Sigma + \Sigma_1} (2x + z) dydz + z dxdy - \iint_{\Sigma_1} (2x + z) dydz + z dxdy$$

由高斯公式 ($\Sigma + \Sigma_1$ 构成的闭曲面是对内侧积分),

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma + \Sigma_1} (2x + z) dydz + z dxdy &= - \iiint_{\Omega} (2+1)dv = -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^1 dz \\ &= -6\pi \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho = -\frac{3}{2}\pi; \end{aligned}$$

$$\iint_{\Sigma_1} (2x + z) dydz + z dxdy = - \iint_{D_{xy}} dxdy = -\pi;$$

$$\text{于是 } \iint_{\Sigma} (2x + z) dydz + z dxdy = -\frac{3}{2}\pi - (-\pi) = -\frac{\pi}{2}.$$

(2) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy$, 其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ ($z \geq 0$) 的上侧.

解 补上平面 $\Sigma_1: z = 0$ ($x^2 + y^2 \leq 1$) 取下侧, 利用高斯公式

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma + \Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy - \iint_{\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy$$

$$\text{记 } I_1 = \iint_{\Sigma + \Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy$$

$$I_2 = \iint_{\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy$$

$$I_1 = \iiint_{\Omega} 6(x^2 + y^2 + z) dv \quad (\text{利用柱坐标计算})$$

$$= 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{1-r^2} (r^2 + z) dz = 2\pi$$

$$I_2 = - \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (-3) dxdy = 3\pi,$$

所以 原式 $= 2\pi - 3\pi = -\pi$.

(3) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (2x + z) dydz + z dxdy$, 其中 Σ 为 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$) 上侧.

解 补上平面 $\Sigma_1: z = 1$ ($x^2 + y^2 \leq 1$) 取下侧. Σ 与 Σ_1 构成闭曲面, 且对内侧积分. 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (2x + z) dydz + z dxdy = \left(\iint_{\Sigma} + \iint_{\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} \right) (2x + z) dydz + z dxdy \\ = & \iint_{\Sigma \cup \Sigma_1 (\text{内侧})} (2x + z) dydz + z dxdy + \iint_{\Sigma_1 (\text{上侧})} (2x + z) dydz + z dxdy. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{利用高斯公式计算 } \iint_{\Sigma \cup \Sigma_1 (\text{内侧})} (2x + z) dydz + z dxdy = - \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial(2x + z)}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial z} \right] dxdydz$$

$$= -3 \iiint_{\Omega} \rho d\rho d\theta dz = -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^1 dz = -6\pi \int_0^1 \rho(1 - \rho^2) d\rho = -\frac{3\pi}{2}. \quad (2)$$

利用合一投影法计算 $\iint_{\Sigma_1 (\text{上侧})} (2x + z) dydz + z dxdy$, 因为 $z = 1$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$. 所以

$$\iint_{\Sigma_1 (\text{上侧})} (2x + z) dydz + z dxdy = \iint_{D_{xy}} [(2x + 1) \cdot 0 + 1] dxdy = D_{xy} \text{ 的面积} = \pi. \quad (3)$$

将 (2)、(3) 式代入 (1) 式, 有

$$\iint_{\Sigma} (2x + z) dydz + z dxdy = -\frac{3\pi}{2} + \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

3. 闭合, 但不连续

【例 6.3】 计算 $\oiint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

解 Σ 为闭曲面, 用 Σ 的方程简化被各函数后再用高斯公式

$$\text{原式} = \frac{1}{a^3} \oiint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = \frac{3}{a^3} \iiint_{\Omega} dv = \frac{3}{a^3} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = 4\pi.$$

【练习 3】 闭合, 但不连续——“挖洞”或化简

1. 计算 $\oiint_{\Sigma} \frac{x}{r^3} dydz + \frac{y}{r^3} dzdx + \frac{z}{r^3} dxdy$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, Σ : 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

解 因为 $P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 在 $(0,0,0)$ 处无定义, 不满足高斯公式的条件, 因而不能直接用高斯公

式. 但注意到在 Σ 上 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a$, 代入曲面积分表达式中,

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} \frac{x}{r^3} dydz + \frac{y}{r^3} dzdx + \frac{z}{r^3} dxdy &= \frac{1}{a^3} \oiint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy \quad (\text{此时用高斯公式}) \\ &= \frac{1}{a^3} \iiint_{\Omega} (1+1+1)dv = \frac{3}{a^3} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = 4\pi. \end{aligned}$$

2. 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{xzdydz + yzdzdx + z^2dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 其中 Σ 为半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

解 利用曲面方程代入被积函数化简得

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \frac{xzdydz + yzdzdx + z^2dxdy}{R}$$

由于曲面不是闭曲面, 因此补上 $\Sigma_1: z=0$ ($x^2 + y^2 \leq R^2$) 取下侧, Σ_1 在 xoy 平面的投影区域为

$D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$, 则

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma} \frac{xzdydz + yzdzdx + z^2dxdy}{R} \\ &= \iint_{\Sigma + \Sigma_1} \frac{xzdydz + yzdzdx + z^2dxdy}{R} - \iint_{\Sigma_1} \frac{xzdydz + yzdzdx + z^2dxdy}{R} \\ &= \iiint_{\Omega} \frac{1}{R} (z + z + 2z) dv - 0 \\ &= \frac{4}{R} \iiint_{\Omega} z dv = \frac{4}{R} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \theta dr = \pi R^3. \end{aligned}$$

七、斯托克斯公式

名称	主要内容
斯托克斯公式	设 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上具有一阶连续偏导数, 则 $\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} dS$ 其中 Γ 是曲面 Σ 的边界曲线, Γ 的方向与 Σ 的侧符合右手系法则.
设向量场 $A(x, y, z) = P(x, y, z) + Q(x, y, z) + R(x, y, z)$	
向量场 A 沿曲线 Γ 按所取方向的环流量	$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$
向量场 A 的旋度	$\text{rot} A = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k$

【知识 7】空间曲线积分：1. 直接曲线积分法；2. 斯托克斯公式.

【例 7.1】计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} ydx + zdy + xdz$, 其中 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, 若从 x 轴的正向看去, 这圆周是取逆时针方向.

解 取 Σ 为平面 $x + y + z = 0$ 的上侧被 Γ 所围成的部分, 则 Σ 的面积为 πa^2 , Σ 的单位法向量

$$\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

由斯托克斯公式, 有

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} ydx + zdy + xdz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS = \iint_{\Sigma} \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{-1}{\sqrt{3}} \right) dS \\ &= -\frac{3}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS = -\sqrt{3} \pi a^2. \end{aligned}$$

【例 7.2】求向量场 $\vec{A}$ 的旋度, 设 $\vec{A} = (z + \sin y)\vec{i} - (z - x \cos y)\vec{j}$.

$$\text{解 } \operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z + \sin y & -(z - x \cos y) & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, 0).$$

【练习 1】利用斯托克斯公式求曲线积分

1.(1) 计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} 3ydx - xzdy + yz^2dz$, 其中 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$, 若从 z 轴的正向看去, 这圆周是取逆时针方向.

解 取 Σ 为平面 $z = 2$ 的上侧被 Γ 所围成的部分, 则 Σ 的单位法向量

$$\vec{n}_0 = (0, 0, 1),$$

Σ 在 xoy 面上的投影区域 D_{xy} 是圆域 $x^2 + y^2 \leq 4$ 。

由斯托克斯公式, 有

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} 3ydx - xzdy + yz^2dz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} dS = - \iint_{\Sigma} (z + 3) dS \\ &= - \iint_{D_{xy}} (2 + 3) dx dy = -5 \times \pi \times 2^2 = -20\pi. \end{aligned}$$

(2) 计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} zdx + (2x - y)dy + (x + y)dz$, 其中 Γ 是平面 $x + y + \frac{z}{2} = 1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界, 若从 x 轴的正向看去, 这曲线是取逆时针方向.

解 取 Σ 为 $\triangle ABC$ 的上侧, Σ 的单位法向量 $\vec{n}_0 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$, 由斯托克斯公式

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} zdx + (2x - y)dy + (x + y)dz &= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & 2x - y & x + y \end{vmatrix} dS \\ &= \frac{4}{3} \iint_{\Sigma} dS = \frac{4}{3} \times \Sigma \text{ 的面积} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{3}{2} \sqrt{2} = 2. \end{aligned}$$

2.(1) 计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} (z - y)dx + (x - z)dy + (x - y)dz$, 其中 Γ 是 $x^2 + y^2 = 1$, $x - y + z = 2$, 从 z 轴正向看去, 这曲线是取顺时针方向.

解 由斯托克斯公式, 有

$$I = \oint_{\Gamma} (z - y)dx + (x - z)dy + (x - y)dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z - y & x - z & x - y \end{vmatrix}$$

$$= 2 \iint_{\Sigma} dx dy = -2 \iint_{D_{xy}} dx dy = -2\pi.$$

(2) 计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} (y+1)dx + (z+2)dy + (x+3)dz$, 其中 Γ 是圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$;

若从 Ox 轴正向看过去, 这个圆周是依逆时针方向进行的.

解 依题意, $P = y+1, Q = z+2, R = x+3$, 由斯托克斯公式, 有

$$\text{原式} = - \iint_{\Sigma} dy dz + dz dx + dx dy = -3 \iint_{\Sigma} dx dy = -3 \iint_{D_{xy}} dx dy = -3 \times D_{xy} \text{ 的面积},$$

记 S 为 Σ 的面积, 由 $x + y + z = 0$ 知, $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 所以 $D_{xy} = \frac{S}{\sqrt{3}}, S = \pi R^2$,

$$\text{原式} = -3 \frac{S}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \pi R^2.$$

3. 求向量场 $\vec{A}$ 的旋度, 设 $\vec{A} = e^{xy} \vec{i} - \cos y \vec{j} + \sin^2 z \vec{k}$.

$$\text{解 } \text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{xy} & -\cos y & \sin^2 z \end{vmatrix} = (0, 0, -xe^{xy}).$$