

第十章 重积分

一、二重积分的概念与性质

$$\begin{array}{ll}
 1. \iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma & 2. \iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] d\sigma = \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \iint_D g(x, y) d\sigma \\
 3. \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma, \quad D = D_1 + D_2 & 4. \iint_D d\sigma = \sigma \\
 5. f(x, y) \leq g(x, y) \Rightarrow \iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma, \quad \left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma & \\
 6. m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma & 7. \iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)\sigma, (\xi, \eta) \in D
 \end{array}$$

【知识 1】利用二重积分的几何意义与性质（计算、估值、比较积分大小、中值定理的应用）

【例 1】(1) 根据二重积分的几何意义 $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$. 其中 $D: x^2+y^2 \leq 1$.

【答案】 $\frac{2}{3}\pi$

(2) 估计下列二重积分的值:

(i) $\iint_D xy(x+y) d\sigma$, 其中 D 是矩形闭区域 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$;

(ii) $\iint_D (x^2+4y^2+9) d\sigma$, 其中 D 是圆形闭区域 $x^2+y^2 \leq 4$;

解: (i) $\because 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \therefore 0 \leq xy(x+y) \leq 2, \therefore 0 \leq \iint_D xy(x+y) d\sigma \leq \iint_D 2 d\sigma = 2$

(ii) 圆形闭区域 D 的面积为 $\sigma = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$, 在 D 中,

$$x^2 + y^2 + 9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 \leq 4(x^2 + y^2) + 9$$

即 $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 \leq 25, \therefore 9\sigma \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma \leq \iint_D 25 d\sigma = 25\sigma,$

即 $36\pi \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma \leq 100\pi$

【练习 1】估值

1. (1) 估计下列积分值, 设 $I = \iint_D (2x^2 + y^2 + 2) d\sigma, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3\}$, 则_____.

答案 $6\pi \leq I \leq 24\pi$.

(2) 估计下列积分值, 设 $I = \iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则_____.

答案 $\pi \leq I \leq e\pi$.

(3) 估计下列积分值, 设 $I = \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$ $D = \{(x, y) | -\pi \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq \pi\}$, 则_____.

答案 $0 \leq I \leq \pi^2$.

★★【例2】判断下列积分值的大小: $I_1 = \iint_D \ln^3(x+y) dx dy$, $I_2 = \iint_D (x+y)^3 dx dy$,

$I_3 = \iint_D [\sin(x+y)]^3 dx dy$, 其中 D 由 $x=0$, $y=0$, $x+y=\frac{1}{2}$, $x+y=1$ 围成, 则 I_1, I_2, I_3 之间的大小顺序为 ()

A. $I_1 < I_2 < I_3$ B. $I_3 < I_2 < I_1$ C. $I_1 < I_3 < I_2$ D. $I_3 < I_1 < I_2$

解: 因为被比较积分的积分区域相同, 故可从被积函数来判断, 在区域 D 上, $1/2 \leq x+y \leq 1$, 当 $1/2 \leq t \leq 1$ 时, $\ln t \leq \sin t \leq t$, 从而当 $(x, y) \in D$ 时,

$$\ln^3(x+y) \leq \sin^3(x+y) \leq (x+y)^3, \text{ 其中的 "=" 只有在边界处才可能取到}$$

所以 $\iint_D \ln^3(x+y) dx dy < \iint_D \sin^3(x+y) dx dy < \iint_D (x+y)^3 dx dy$, 故应选 C.

★★【练习2】比较积分大小

1. (1) $I_1 = \iint_D (x+y) d\sigma$, $I_2 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma$, $I_3 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$,

D 由 $x=0, y=0, x+y=1$ 围成, 则 (C).

(A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_2 > I_1 > I_3$ (C) $I_1 > I_2 > I_3$ (D) $I_1 = I_2 = I_3$

(2) 设 $I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$, $I_2 = \iint_D \cos(x^2+y^2) d\sigma$, $I_3 = \iint_D \cos(x^2+y^2)^2 d\sigma$,

其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 试比较三个积分的大小 (A).

(A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_2 > I_1 > I_3$ (C) $I_1 > I_2 > I_3$ (D) $I_1 = I_2 = I_3$

(3) 设 D 是由 $x=0$, $y=0$, $x+y=\frac{1}{10}$, $x+y=1$ 围成的平面区域,

$I_1 = \iint_D \sin(x+y) d\sigma$, $I_2 = \iint_D (x+y) d\sigma$, $I_3 = \iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 试比较三个积分的大小 (C).

(A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_2 < I_1 < I_3$ (C) $I_3 < I_1 < I_2$ (D) $I_3 < I_2 < I_1$

【思考题1】

★★★1. 试用二重积分性质证明不等式

$1 \leq \iint_D (\sin x^2 + \cos y^2) d\sigma \leq \sqrt{2}$, 其中 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

证明: $\because$

$$\iint_D \cos y^2 d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^1 \cos y^2 dy = \int_0^1 \cos y^2 dy = \int_0^1 \cos x^2 dx = \int_0^1 dy \int_0^1 \cos x^2 dx = \iint_D \cos x^2 d\sigma$$

$$\therefore \iint_D (\sin x^2 + \cos y^2) d\sigma = \iint_D (\sin x^2 + \cos x^2) d\sigma = \iint_D \sqrt{2} \sin(x^2 + \frac{\pi}{4}) d\sigma$$

$\therefore$ 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin(x^2 + \frac{\pi}{4}) \leq 1$, 由重积分的性质即得

$$1 \leq \iint_D (\sin x^2 + \cos y^2) d\sigma \leq \sqrt{2}, \text{ 证毕。}$$

★★★2. 计算 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D e^{x^2-y^2} \cos(x+y) dx dy$, 其中 D 由中心在原点, 半径为 r 的圆所围成。

解: $\because e^{x^2-y^2} \cos(x+y)$ 在 D 上连续, $\therefore$ 由二重积分的中值定理知, 在 D 内至少存在一点 (ξ, η) ,

$$\text{使得 } \iint_D e^{x^2-y^2} \cos(x+y) dx dy = e^{\xi^2-\eta^2} \cos(\xi+\eta) \cdot \pi r^2, \text{ 于是有}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D e^{x^2-y^2} \cos(x+y) dx dy = \lim_{r \rightarrow 0} e^{\xi^2-\eta^2} \cos(\xi+\eta) = \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} e^{\xi^2-\eta^2} \cos(\xi+\eta) = 1$$

二、二重积分的计算

(一) 直角坐标系下 (X 型、Y 型)

【知识 1】选择合适积分类型

★★【例 3】计算二重积分 $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ 其中 D 是由直线 $x=2, y=x, xy=1$ 所围成的区域。

$$\text{解 } \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_1^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{y^2} dy = \int_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{9}{4}.$$

【注】若 $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, 则 $\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = [\int_a^b f_1(x) dx] [\int_c^d f_2(y) dy]$.

★★【练习 3】选择合适积分类型

1. (1) 计算二重积分 $\iint_D |x| dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0$.

$$\text{解 } \iint_D |x| dx dy = 2 \int_0^a x dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy = 2 \int_0^a x \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{2}{3} a^3.$$

(2) 计算 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 D 为由直线 $y=x-2$ 及抛物线 $y^2=x$ 所围成的闭区域。

$$\text{解 } \iint_D xy d\sigma = \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} xy dy = \int_{-1}^2 \frac{1}{2} y x^2 \Big|_{y^2}^{y+2} dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 [y(y+2)^2 - y^5] dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{y^4}{4} + \frac{4}{3} y^3 + 2y^2 - \frac{y^6}{6} \right]_{-1}^2 = 5\frac{5}{8}.$$

(3) 计算二重积分 $\iint_D (3x+2y)d\sigma$, 其中 D 是由直线 $x=0$, $y=0$, $x+y=2$ 围成的闭区域.

$$\text{解 } I = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (3x+2y)dy = \int_0^2 (3xy+y^2)\Big|_0^{2-x} dx = \int_0^2 (4+2x-2x^2)dx = \frac{20}{3}.$$

(4) 计算二重积分 $\iint_D ye^{xy}d\sigma$, 其中 D 是由 $xy=1$, $x=2$, $y=2$ 围成的闭区域.

$$\text{解 } I = \int_{\frac{1}{2}}^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 e^{xy} y dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{xy} \Big|_{\frac{1}{y}}^2 dy = \int_{\frac{1}{2}}^2 (e^{2y} - e) dy = \left(\frac{1}{2}e^{2y} - ey\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{1}{2}e^4 - 2e.$$

2. 画出积分区域, 并计算下列二重积分:

(1) $\iint_D x\sqrt{y}d\sigma$, 其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ 所围成的闭区域;

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$. 于是

$$\iint_D x\sqrt{y}d\sigma = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\sqrt{y}dy = \int_0^1 x \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^{\frac{7}{4}} - \frac{2}{3}x^4\right)dx = \frac{6}{55}.$$

(2) $\iint_D xy^2d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域;

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x,y) | -2 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D xy^2d\sigma &= \int_{-2}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} xy^2dx = \int_{-2}^2 \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_0^{\sqrt{4-y^2}} dy \\ &= \int_{-2}^2 (2y^2 - \frac{1}{2}y^4)dy = \left[\frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{10}y^5\right]_{-2}^2 = \frac{64}{15}. \end{aligned}$$

(3) $\iint_D (x^2+y^2-x)d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=2$, $y=x$ 及 $y=2x$ 轴所围成的闭区域.

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x,y) | 0 \leq y \leq 2, \frac{1}{2}y \leq x \leq y\}$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2+y^2-x)d\sigma &= \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y (x^2+y^2-x)dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{3}x^3 + y^2x - \frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{y}{2}}^y dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{19}{24}y^3 - \frac{3}{8}y^2\right)dy = \frac{13}{6}. \end{aligned}$$

3. 画出积分区域, 并计算下列二重积分:

(1) $\iint_D e^{x+y}d\sigma$, 其中 $D: |x|+|y| \leq 1$

(2) $\iint_D \frac{\sin x}{x}d\sigma$, 其中 D 是由 $y=x$, $y=\frac{x}{2}$, $x=2$ 所围成的区域

(3) $\iint_D x^2e^{-y^2}d\sigma$, 其中 D 是以 $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ 为顶点的三角形闭区域

$$\text{解: (1) 所求} = \int_{-1}^0 e^x dx \int_{-x-1}^{x+1} e^y dy + \int_0^1 e^x dx \int_{x-1}^{-x+1} e^y dy = \int_{-1}^0 e^x [e^y]_{-x-1}^{x+1} dx + \int_0^1 e^x [e^y]_{x-1}^{-x+1} dx$$

$$= \int_{-1}^0 [e^{2x+1} - e^{-1}] dx + \int_0^1 [e - e^{2x-1}] dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x+1} - \frac{x}{e} \right]_{-1}^0 + \left[ex - \frac{1}{2} e^{2x-1} \right]_0^1 = e - \frac{1}{e}$$

$$(2) \text{ 所求} = \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx \int_{x/2}^x dy = \int_0^2 \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{2} dx = \left[-\frac{1}{2} \cos x \right]_0^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos 2)$$

$$(3) \text{ 所求} = \int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2} dx = \int_0^1 \frac{y^3}{3} e^{-y^2} dy = -\frac{1}{6} \int_0^1 y^2 de^{-y^2} = -\frac{1}{6} \left[y^2 e^{-y^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-y^2} dy^2 \right]$$

$$= -\frac{1}{6} \left[e^{-1} + \left[e^{-y^2} \right]_0^1 \right] = \frac{1}{6} [1 - 2e^{-1}]$$

4. (1) 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$, $y=x$ 和 x 轴所围成, 它的面密度

$\rho(x, y) = x^2 + y^2$, 求该薄片的质量.

解: 设该薄片的质量为 M , 则质量元素 $dM = \rho(x, y) d\sigma$

$$M = \iint_D \rho(x, y) d\sigma = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x^2 + y^2) dx = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_y^{2-y} dy =$$

$$\int_0^1 \left[\frac{(2-y)^3}{3} + 2y^2 - \frac{7}{3}y^3 \right] dy = \left[-\frac{(2-y)^4}{12} + \frac{2}{3}y^3 - \frac{7}{12}y^4 \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

(2) 计算由四个平面 $x=0, y=0, x=1, y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

解 四个平面所围成的立体如图, 所求体积为

$$V = \iiint_D (6-2x-3y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (6-2x-3y) dy$$

$$= \int_0^1 \left[6y - 2xy - \frac{3}{2}y^2 \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(\frac{9}{2} - 2x \right) dx = \frac{7}{2}.$$

(3) 求由平面 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体的体积.

解 立体在 xOy 面上的投影区域为 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$, 所求立体的体积为以曲面 $z=6-x^2-y^2$ 为顶, 以区域 D 为底的曲顶柱体的体积, 即

$$V = \iint_D (6-x^2-y^2) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (6-x^2-y^2) dy = \frac{17}{6}.$$

(4) 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

解 由 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases}$ 消去 z , 得 $x^2+2y^2=6-2x^2-y^2$, 即 $x^2+y^2=2$, 故立体在 xOy 面上的投影区域

为 $x^2+y^2 \leq 2$, 因为积分区域关于 x 及 y 轴均对称, 并且被积函数关于 x, y 都是偶函数, 所以

$$V = \iint_D [(6-2x^2-y^2)-(x^2+2y^2)] d\sigma = \iint_D (6-3x^2-3y^2) d\sigma$$

$$= 12 \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (2-x^2-y^2) dy = 8 \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{(2-x^2)^3} dx = 6\pi.$$

★★ (二) 利用极坐标计算二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$$

★★ 【例 4】 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq 4$.

$$\text{解 原式} = \iint_D r \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 dr = \frac{16}{3} \pi.$$

★★ 【练习 4】 利用极坐标计算二重积分

1. (1) 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 D 是由圆环 $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ 所围成的闭区域.

解 选择极坐标系, D 可表示为 $a \leq \rho \leq b$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 于是

$$I = \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \rho d\rho = 2\pi \cdot \frac{1}{3} \rho^3 \Big|_a^b = \frac{2\pi}{3} (b^3 - a^3).$$

(2) 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2} d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

解 在极坐标系中, 积分区域 D 可表示为 $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} d\sigma = \iint_D e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho = 2\pi \left(-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right) \Big|_0^R = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

(3) 计算二重积分 $\iint_D e^{2(x^2+y^2)} dx dy$, 其中 D 是由 $x^2 + y^2 = 4$ 所围成的闭区域.

$$\text{解 } \iint_D e^{2(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 e^{2\rho^2} \rho d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} e^{2\rho^2} \Big|_0^2 \right) d\theta = \frac{\pi}{2} (e^8 - 1).$$

2. (1) 计算二重积分 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2) dx dy$, 其中 $D: x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \iint_D \ln(1+x^2+y^2) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \ln(1+r^2) \cdot r dr \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot [(1+r^2) \ln(1+r^2) - (1+r^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} (2 \ln 2 - 1). \end{aligned}$$

(2) 利用极坐标计算二重积分 $\iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy$, 其中 $D: 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0, y \leq x$.

$$\text{解 原式} = \iint_D \theta r dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta d\theta \int_1^2 r dr = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} (4-1) = \frac{3}{64} \pi^2$$

(3) 设 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}$, 将二重积分 $\iint_D \ln \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$ 化为极坐标形式的二次积分, 并计算积分值.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \iint_D \ln \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^e \ln r \cdot r dr = 2\pi \int_1^e \ln r \frac{1}{2} dr^2 = \pi [r^2 \ln r]_1^e - \int_1^e r dr \\ &= \pi \left[e^2 - \frac{1}{2}(e^2 - 1) \right] = \frac{\pi}{2}(e^2 + 1). \end{aligned}$$

3. (1) 计算 $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 D 是由圆 $x^2 + y^2 = \pi^2$, $x^2 + y^2 = 4\pi^2$, $y = x$ 和 $y = 0$ 所围成的闭区域.

解 在极坐标系中, D 可表示为 $\pi \leq \rho \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$,

$$I = \iint_D \sin \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\pi}^{2\pi} \rho \sin \rho d\rho = \frac{\pi}{4} [-\rho \cos \rho]_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \cos \rho d\rho = -\frac{3}{4}\pi^2.$$

(2) 计算 $\iint_D x dx dy$, 其中 D 是由圆 $x^2 + y^2 \leq ax$ ($a > 0$) 所围成的闭区域.

解 在极坐标系中, D 可表示为 $0 \leq \rho \leq a \cos \theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \rho \cos \theta \rho d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \frac{1}{3} \rho^3 \Big|_0^{a \cos \theta} d\theta = \frac{a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \\ &= \frac{2a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{2a^3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} a^3. \end{aligned}$$

(3) 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 D 是由 y 轴及圆周 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 所围成的在第一象限内的区域.

$$\text{解:} \quad \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} r^2 dr = \frac{16}{9}.$$

【思考题 2】

★★★1. 设 $f(x, y)$ 连续, D 由 $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$ 围成, $f(x, y)$ 满足

$$f(x, y) = xy + \iint_D f(x, y) dx dy, \text{ 求 } f(x, y).$$

解 在 D 上对 $f(x, y) = xy + \iint_D f(x, y) dx dy$ 两边积分,

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D [xy + \iint_D f(x, y) dx dy] d\sigma.$$

由于 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 是常数, 记为 I , 即 $I = \iint_D f(x, y) d\sigma$. 所以

$$I = \iint_D xy d\sigma + I \iint_D d\sigma. \quad (1)$$

D 可由不等式表示为 $0 \leq y \leq x^2$, $0 \leq x \leq 1$,

$$\iint_D xy d\sigma = \int_0^1 x dx \int_0^{x^2} y dy = \int_0^1 x \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{12}. \quad (2)$$

$$I \iint_D d\sigma = I \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy = \frac{1}{3} I. \quad (3)$$

将(2)、(3)代入(1)式,得

$$I = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} I, \quad I = \iint_D f(x, y) dx dy = \frac{1}{8}.$$

故 $f(x, y) = xy + \iint_D f(x, y) dx dy = xy + \frac{1}{8}.$

★★★2. (1) 计算 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t^3} \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy$ ($t > 0$), 其中函数 $f(u)$ 可微, 且 $f(0) = 0$.

解 在极坐标系下 $\iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r) r dr = 2\pi \int_0^t f(r) r dr,$

$$\begin{aligned} \text{所以, 原式} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\pi}{\pi t^3} \int_0^t f(r) r dr = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^t f(r) r dr}{t^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2f(t)t}{3t^2} = \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{2}{3} f'(0). \end{aligned}$$

(2) 设函数 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且满足

$$f(t) = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} (x^2+y^2) f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy + t^4, \text{ 求 } f(t).$$

解: 从积分区域和被积函数的形式可见宜选极坐标计算。

$$f(t) = 2 \iint_{\rho \leq t} \rho^2 f(\rho) \rho d\rho d\theta + t^4 = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t \rho^3 f(\rho) d\rho + t^4 = 4\pi \int_0^t \rho^3 f(\rho) d\rho + t^4$$

两边求导得 $f'(t) = 4\pi t^3 f(t) + 4t^3 = 4t^3 [\pi f(t) + 1]$, 所以 $\frac{f'(t)}{\pi f(t) + 1} = 4t^3$ 两边积分得 $\frac{1}{\pi} \ln[\pi f(t) + 1] = t^4 + C,$

又由题设条件知 $f(0) = 0$ 代入上式得 $C = 0$, 故

$$\frac{1}{\pi} \ln[\pi f(t) + 1] = t^4 \Rightarrow f(t) = \frac{1}{\pi} (e^{\pi t^4} - 1)$$

三、交换二重积分的积分次序

【知识1】X型与Y型互化及其计算

【例 5】(1) 交换二重积分积分次序 $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx$.

解 所给二次积分的积分区域 D 可表示为 $0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1$,

该积分区域又可表示为 $x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1$, 故

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy.$$

(2) 改变二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} dx$ 的积分次序, 并计算积分值.

$$\text{解} \quad \int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 dx \int_0^x e^{-x^2} dy = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-1}).$$

【练习 5】交换积分次序

1. (1) 交换二重积分积分次序 $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx$.

解 D 可表示为 $y^2 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2$,

该积分区域又可表示为 $\frac{1}{2}x \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4$, 故

$$\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx = \int_0^4 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

(2) 交换二重积分积分次序 $\int_0^a dx \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy$.

解 所给二次积分的积分区域 D 可表示为 $a-x \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2}, 0 \leq x \leq a$, 该积分区域又可表示为 $a-y \leq x \leq \sqrt{a^2-y^2}, 0 \leq y \leq a$, 故

$$\int_0^a dx \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx.$$

(3) 交换二重积分积分次序 $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$.

解 D 可表示为 $0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq e$,

该积分区域又可表示为 $e^y \leq x \leq e, 0 \leq y \leq 1$, 故

$$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx.$$

2. (1) 交换二重积分积分次序 $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy$.

解 所给二次积分的积分区域 D 可表示为 $x^3 \leq y \leq \sqrt{2-x}, 0 \leq x \leq 1$,

将积分区域 D 分为两个部分, $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \sqrt[3]{y}, 0 \leq y \leq 1\}$,

$D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2-y^2, 1 \leq y \leq \sqrt{2}\}$, 故

$$\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{2-y^2} f(x, y) dx.$$

(2) 交换二重积分积分次序 $\int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx$.

解 D 由两个积分分别表示两个积分区域, $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 1\}$;

$$D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3-y, 1 \leq y \leq 3\},$$

将两个合并, 考虑先对 y 积分, 该积分区域又可表示为 $\frac{1}{2}x \leq y \leq 3-x, 0 \leq x \leq 2$, 故

$$\int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx = \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} f(x, y) dy.$$

$$3. (1) \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$$

$$(2) \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx$$

解: (1) 因为 $\frac{\sin y}{y}$, $e^{\frac{1}{y}}$ 与 $\sin \frac{1}{y}$ 的原函数都不是初等函数, 所以不能先对 y 积分, 必须交换积分顺序, 积分区域如图,

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy &= \int_0^1 \frac{\sin y}{y} dy \int_{y^2}^y dx = \int_0^1 \frac{\sin y}{y} (y - y^2) dy = \int_0^1 \sin y dy - \int_0^1 y \sin y dy = (-\cos y)_0^1 + \int_0^1 y d \cos y \\ &= 1 - \cos 1 + [y \cos y]_0^1 - \int_0^1 \cos y dy = 1 - [\sin y]_0^1 = 1 - \sin 1 \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 原式} = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{x^2}^x e^{\frac{y}{x}} dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 x \left[e^{\frac{y}{x}} \right]_{x^2}^x dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 x (e - e^x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} e - e^{\frac{1}{2}} \right)$$

【思考题 3】

★★★1. (2004 年数学一) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2)$ 等于 ()

- (A) $2f(2)$ (B) $f(2)$ (C) $-f(2)$ (D) 0

解: 交换积分次序 $F(t) = \int_1^t dx \int_1^x f(x) dy = \int_1^t f(x)(x-1) dx$ 应用变上限积分的求导公式有

$F'(t) = f(t)(t-1)$, 所以 $F'(2) = f(2)$ 。应选 B

【知识 2】直角坐标系与极坐标系互化

【例 6】(1) 化二重积分 $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx$ 为极坐标下的二次积分。

解积分区域 D 是以原点为圆心, 以 a 为半径的圆在第一象限部分, 所以在极坐标下

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \text{ 于是}$$

$$\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

(2) 计算二次积分 $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2) dx, (a > 0).$

$$\text{解 } I = \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a r^2 \cdot r dr d\theta = \frac{\pi}{8} a^4.$$

【练习 6】直角坐标系与极坐标系互化

1. (1) 化二重积分 $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$ 为极坐标下的二次积分.

解 积分区域 D 可表示为 $1-x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1,$

在极坐标下, D 表示为 $\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$ 于是

$$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{(\cos \theta - \sin \theta)^{-1}}^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

(2) 化二重积分 $\int_0^1 dx \int_x^x f(x^2 + y^2) dx$ 为极坐标下的二次积分.

解 在极坐标下, D 表示为: $0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \theta}, \arctan \frac{1}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},$ 于是,

$$\int_0^1 dx \int_x^x f(x^2 + y^2) dx = \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

(3) (2006 年数学一、二) 设 $f(x,y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr = ($

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$ (B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dy$ (D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dy$

解: 题设积分区域为 $D: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 1$ 于是根据极坐标变换, 易得

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dy. \text{ 故应选 (C)}$$

2. (1) 计算 $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2-y^2}} e^{x^2+y^2} dx.$

解 由给出的二次积分知, 积分区域 D 可表示为 $y \leq x \leq \sqrt{2-y^2}, 0 \leq y \leq 1.$

选择在极坐标中计算此二重积分, D 又可表示为 $0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},$ 于是

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2-y^2}} e^{x^2+y^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} e^{\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} e^{\rho^2} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} (e^2 - 1).$$

(2) 计算二次积分 $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2) dx, (a > 0)$.

$$\text{解 } I = \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a r^2 \cdot r dr d\theta = \frac{\pi}{8} a^4.$$

(3) 计算二次积分 $\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy$.

$$\text{解 利用极坐标 原式} = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^2 r^2 dr = \pi \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3} \pi.$$

四、计算三重积分 (直角坐标、柱面坐标、球面坐标)

(一) 【直角坐标】

1. 【投影法】“先一后二”

【例 7】计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是由坐标面 $x=0, y=0, z=0$ 及平面 $x+y+z=1$ 所围成的四面体.

解 Ω 在 xy 面上的投影区域 D_{xy} 为三角形闭区域

$$D_{xy} = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\},$$

Ω 的下边界曲面是 $z=0$, 上边界曲面是 $z=1-x-y$ 。

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x dx dy dz &= \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{2} x(1-x-y)^2 \right]_0^{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 dx = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

【练习 7】投影法

1. (1) 计算 $\iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dx dy dz$, Ω 由曲面 $z=xy, y=x, x=1, z=0$ 围成.

解 选择直角坐标, Ω 可表示为 $0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1$ 。于是

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} xy^2 z^3 dz = \int_0^1 dx \int_0^x xy^2 \frac{1}{4} z^4 \Big|_0^{xy} dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 dx \int_0^x x^5 y^6 dy = \frac{1}{28} \int_0^1 x^5 \frac{1}{7} y^7 \Big|_0^x dx = \frac{1}{28 \times 13} x^{13} \Big|_0^1 = \frac{1}{364}. \end{aligned}$$

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} xz dx dy dz$, 其中 Ω 是由平面 $z=0, z=y, y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq y, x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\},$$

$$\text{于是 } \iiint_{\Omega} xz dx dy dz = \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^y z dz = \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 \frac{1}{2} y^2 dy$$

$$= \frac{1}{6} \int_{-1}^1 x(1-x^6) dx = 0.$$

2.(1) 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 Ω 为平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成的四面体.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1-x-y, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\},$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right] dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2(1+x)} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8}x \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{提示:} \quad \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{-2(1+x+y)^2} \right]_0^{1-x-y} dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{-2(1+x+y)} - \frac{1}{8}y \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2(1+x)} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8}x \right] dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{3}{8}x + \frac{1}{16}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right). \end{aligned}$$

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1\}$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \iiint_{\Omega} xyz dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} xy(1-x^2-y^2) dy = \int_0^1 \frac{1}{8} x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

3. 设有一物体, 占有空间闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, 在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z) = x+y+z$, 计算该物体的质量.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad M &= \iiint_{\Omega} \rho dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z) dz = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x+y+\frac{1}{2} \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y \right]_0^1 dx = \int_0^1 (x+1) dx = \frac{1}{2}(x+1)^2 \Big|_0^1 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

2. 【截面法】“先后一”

【例 8】 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dv$, 其中 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1, z = 2$ 围成的立体.

$$\text{解} \quad \iiint_{\Omega} z^2 dv = \int_1^2 z^2 dz \iint_{D_z} dx dy = \int_1^2 z^2 \cdot \pi z^2 dz = \frac{1}{5} \pi z^5 \Big|_1^2 = \frac{31}{5} \pi.$$

【练习 8】截面法

1. (1) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 2$ 围成的闭区域.

解 积分区域 Ω 可表示为 $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 2\}$,

由于 $D_z: x^2 + y^2 \leq z^2$, 且 D_z 的面积 $\sigma(z) = \pi z^2$,

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^2 z dz \iint_{D_z} dx dy = \int_0^2 \pi z^2 \cdot z dz = \frac{\pi}{4} z^4 \Big|_0^2 = 4\pi$$

(2) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ 被夹在 $z = 3$ 和 $z = 4$ 之间的部分.

解 用先二后一法计算三重积分. $D_z = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 25 - z^2\}$, D_z 的面积为 $\pi(25 - z^2)$.

$$\iiint_{\Omega} z dv = \int_3^4 z dz \iint_{D_z} dx dy = \int_3^4 z \cdot \pi(25 - z^2) dz = \pi \left[\frac{25}{2} z^2 - \frac{1}{4} z^4 \right]_3^4 = \frac{175}{4} \pi.$$

2. (1) 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, Ω 由椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 围成.

解 选择直角坐标, 用先二后一法计算.

D_z 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$, D_z 的面积为 $\pi ab(1 - \frac{z^2}{c^2})$.

$$I = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$$

$$= \int_{-c}^c z^2 \pi ab (1 - \frac{z^2}{c^2}) dz = 2\pi ab \int_0^c (z^2 - \frac{z^4}{c^2}) dz = \frac{4}{15} \pi abc^3.$$

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由锥面 $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = h (R > 0, h > 0)$ 所围成的闭区域.

解 当 $0 \leq z \leq h$ 时, 过 $(0, 0, z)$ 作平行于 xOy 面的平面, 截得立体 Ω 的截面为圆 D_z : $x^2 + y^2 = (\frac{R}{h} z)^2$, 故 D_z 的半径为 $\frac{R}{h} z$, 面积为 $\frac{\pi R^2}{h^2} z^2$, 于是

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^h z dz \iint_{D_z} dx dy = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h z^3 dz = \frac{\pi R^2 h^2}{4}.$$

(二) 【柱面坐标】柱面变换

【例 9】 计算 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dv$, 其中 Ω 由 $z = x^2 + y^2$ 及 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 围成.

解 由 $z = x^2 + y^2$ 及 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 围成的立体在柱坐标系中 Ω 可表示为

$\rho^2 \leq z \leq \rho$, $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 。于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dv &= \iiint_{\Omega} \rho \cdot \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_{\rho^2}^{\rho} dz = 2\pi \int_0^1 \rho^2 (\rho - \rho^2) d\rho \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 - \frac{1}{5} \rho^5 \right]_0^1 = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

【练习9】柱面变换

1. (1) 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是由柱面 $x^2 + y^2 = 4$ 及平面 $z = -1$, $z = 2$ 所围成的闭区域。

解 Ω 是柱面, 在柱坐标中 Ω 可表示为: $-1 \leq z \leq 2$, $0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 。

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = \iiint_{\Omega} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{-1}^2 dz = 2\pi \left(\frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^2 \right) (z \Big|_{-1}^2) = 24\pi.$$

(2) 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, Ω 为 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 1$ 所围成的空间区域。

$$\text{解 } I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = \iiint_{\Omega} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_{\rho^2}^1 dz = 2\pi \int_0^1 \rho^3 (1 - \rho^2) d\rho = \frac{\pi}{6}$$

(3) 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 平面 $z = 1$ 所围成的区域。

$$\text{解: } I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 r^3 dz = \frac{\pi}{10}.$$

2. (1) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2) dx dy dz$, 其中 Ω 为上半球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$ 。

$$\begin{aligned} \text{解 } \iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2) dx dy dz &= \iiint_{\Omega} z \rho^2 \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} z dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho^3 \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = \pi \int_0^1 \rho^3 (1 - \rho^2) d\rho = \pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 - \frac{1}{6} \rho^6 \right]_0^1 = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} xy dv$, Ω 是由圆柱 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$ 所围成的闭区域。

解 曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 所围成的立体, 在柱坐标中 Ω 可表示为

$$0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \iiint_{\Omega} xy dv &= \iiint_{\Omega} \rho \cos \theta \cdot \rho \sin \theta \cdot \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^1 dz \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^1 \cdot z \Big|_0^1 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

3. (1) 设 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 位于第一卦限的部分, 计算 $\iiint_{\Omega} z dv$ 。

$$\text{解 原式} = \iiint_{\Omega} z \cdot r dr d\theta dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} z dz = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r \cdot \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{\sqrt{1-r^2}} dr = \frac{\pi}{4} \int_0^1 r (1 - r^2) dr = \frac{\pi}{16}$$

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 由 $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 = 4$ 及 $z = 0$ 围成.

解 由 $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 = 4$ 及 $z = 0$ 围成的立体在柱坐标系中 Ω 可表示为

$$0 \leq z \leq \sqrt{9 - \rho^2}, \quad 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dv &= \iiint_{\Omega} z \cdot \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{\sqrt{9-\rho^2}} z dz = 2\pi \int_0^2 \rho \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{\sqrt{9-\rho^2}} d\rho \\ &= \pi \int_0^2 \rho (9 - \rho^2) d\rho = 14\pi. \end{aligned}$$

(3) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z dv$, Ω 是由曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 所围成的闭区域.

解 曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 所围成的立体在柱坐标中, Ω 可表示为

$$\rho^2 \leq z \leq \sqrt{2 - \rho^2}, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dv &= \iiint_{\Omega} z \cdot \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z dz = 2\pi \int_0^1 \rho \frac{1}{2} z^2 \Big|_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} d\rho \\ &= \pi \int_0^1 \rho (2 - \rho^2 - \rho^4) d\rho = \pi \left[\rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 - \frac{1}{6} \rho^6 \right]_0^1 = \frac{7}{12} \pi. \end{aligned}$$

(三) 【球面坐标】球面变换

【例 10】计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域.

解 在球坐标中, Ω 可表示为 $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 而被积函数 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

$$\text{于是 } I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \iiint_{\Omega} r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \pi.$$

【练习 10】球面变换

1. (1) 设 Ω 是由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = 1$ 所围的有界闭区域, 计算 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$.

$$\text{解 原式} = \iiint_{\Omega} r \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} r^3 \sin \varphi dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \varphi}{\cos^4 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{6} (2\sqrt{2} - 1)$$

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} \ln(x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω : $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

$$\text{解 } \iiint_{\Omega} \ln(x^2 + y^2 + z^2) dv = \iiint_{\Omega} \ln r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_1^2 \frac{2}{3} \ln r^3 \cdot r^2 dr = \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{9} \int_1^2 \ln r^3 dr^3$$

$$= \frac{\pi}{9} [r^3 (3 \ln r - 1)]_1^2 = \frac{\pi}{9} (24 \ln 2 - 7)。$$

(3) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$, 其中 Ω 是由圆锥面 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 及球面 $r = 2$ 所围成的位于 xoy 平面上方的立体。

解 在球坐标中, Ω 可表示为 $0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 而被积函数 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$ 。

$$\text{于是 } I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv = \iiint_{\Omega} r \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \varphi d\varphi \int_0^2 r^3 dr$$

$$= 2\pi \cdot (-\cos \varphi)_0^{\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{1}{4} r^4 = 4\pi(2 - \sqrt{3})。$$

2. (1) 计算 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$, 其中 Ω 是由 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 所围的有界闭区域。

$$\text{解 原式} = \iiint_{\Omega} r \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos \varphi} r^3 \sin \varphi dr$$

$$= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{8}{5}\pi$$

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 围成。

解 由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 围成的立体在球坐标系中 Ω 可表示为

$$0 \leq r \leq \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi。 \text{于是}$$

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \iiint_{\Omega} r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^4 dr = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \frac{1}{5} (2 \cos \varphi)^5 d\varphi$$

$$= -\frac{2^6}{5} \pi \left(\frac{1}{6} \cos^6 \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{15} \pi。$$

(3) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq z$ 。

解 在球坐标中 $\Omega = \left\{ (r, \varphi, \theta) \mid 0 \leq r \leq \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$, 于是

$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \iiint_{\Omega} r \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^3 dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{\cos \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^4 \varphi d\varphi = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{5} \cos^5 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{10}。$$

五、利用二重积分、三重积分的对称性与被积函数的奇偶性

(一) 二重积分的积分区域的对称性与函数的奇偶性

【例 11】(1) 设 $D_1 = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,

$$I_1 = \iint_{D_1} (\sin x \cos y + x^2) d\sigma, \quad I_2 = \iint_{D_2} x^2 d\sigma, \quad \text{则 } I_1 \text{ 与 } I_2 \text{ 的关系是 (B)}.$$

$$(A) \quad I_1 = I_2 \quad (B) \quad I_1 = 2I_2 \quad (C) \quad I_1 = 4I_2 \quad (D) \quad I_1 = \frac{1}{2}I_2$$

(2) 计算 $\iint_D (|x| + |y|) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$.

解 D 关于 x 轴、 y 轴均对称, 而被积函数 $|x| + |y|$ 关于变量 x 、 y 均为偶函数. 记 D_1 是 D 在第一象限部分, 由对称性, 得

$$\iint_D (|x| + |y|) dx dy = 4 \iint_{D_1} (|x| + |y|) dx dy = 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y) dy = \frac{4}{3}.$$

【练习 11】二重积分的积分区域的对称性与函数的奇偶性

1. (1) 设有平面区域 $D = \{(x, y) | -a \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$, $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$,

则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy = (A)$.

$$(A) \quad 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$$

$$(B) \quad 2 \iint_{D_1} xy dx dy$$

$$(C) \quad 4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$$

$$(D) \quad 0$$

(2) 计算 $I = \iint_D [xf(x^2 + y^2) + yf(x^2 - y^2)] dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$.

解 积分区域 D 关于 y 轴对称, 被积函数 $xf(x^2 + y^2)$ 关于 x 是奇函数,

$$\iint_D xf(x^2 + y^2) dx dy = 0;$$

同时积分区域 D 关于 x 轴对称, 而被积函数 $yf(x^2 - y^2)$ 关于 y 是奇函数,

$$\iint_D yf(x^2 - y^2) dx dy = 0,$$

故 $I = 0$ 。

2. (1) 计算 $I = \iint_D (2 + xy) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

解 $I = \iint_D (2 + xy) d\sigma = 2 \iint_D d\sigma + \iint_D xy d\sigma$

$$2 \iint_D d\sigma = 2 \times D \text{ 的面积} = 2\pi; \quad \iint_D xy d\sigma = 0.$$

所以 $\iint_D (2 + xy) d\sigma = 2\pi$ 。

(2) 计算二重积分 $\iint_D (x+2y)d\sigma$, 其中 D 是由 $y=2x^2$, $y=x^2+1$ 围成的闭区域.

$$\begin{aligned}\text{解 } I &= \iint_D (3x+2y)d\sigma = \iint_D 3xd\sigma + \iint_D 2yd\sigma = 0 + \iint_D 2yd\sigma = 4 \iint_{D_1} yd\sigma. \\ &= 4 \int_0^1 dx \int_{2x^2}^{x^2+1} ydy = 2 \int_0^1 (1+2x^2-3x^4)dx = 2(x + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^5)_0^1 = \frac{32}{15}.\end{aligned}$$

3. (1) 计算 $I = \iint_D (x+y)^2 d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 2y\}$.

解 在极坐标系下, D 可表示为 $0 \leq \rho \leq 2\sin\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

$$I = \iint_D (x^2 + 2xy + y^2)d\sigma = \iint_D (x^2 + y^2)d\sigma + \iint_D 2xyd\sigma,$$

因为 D 关于 y 轴对称, $\iint_D 2xyd\sigma = 0$.

$$\begin{aligned}I &= \iint_D (x^2 + y^2)d\sigma = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} \rho^2 \rho d\rho = \int_0^\pi \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^{2\sin\theta} d\theta \\ &= 4 \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = 8 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \pi.\end{aligned}$$

(2) 设 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$, 求 $I = \iint_D (x^2 + 2\sin x + 3y + 4)d\sigma$.

$$\text{解 } I = \iint_D (x^2 + 2\sin x + 3y + 4)d\sigma = \iint_D x^2 d\sigma + \iint_D 2\sin x d\sigma + \iint_D 3y d\sigma + \iint_D 4d\sigma,$$

因为积分区域 D 是圆心在原点的圆, 它关于 x 轴、 y 轴均对称,

$$\iint_D 2\sin x d\sigma = 0, \quad \iint_D 3y d\sigma = 0.$$

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 d\sigma &= \iint_D (\rho \cos \theta)^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^R \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} R^4 = \frac{\pi}{4} R^4,\end{aligned}$$

$$\iint_D 4d\sigma = 4 \times D \text{ 的面积} = 4\pi R^2, \text{ 故 } I = \frac{\pi}{4} R^4 + 4\pi R^2.$$

(二) 三重积分的积分区域的对称性与函数的奇偶性

【例 12】(1) 设有空间闭区域 $\Omega_1 = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$,

$\Omega_2 = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则有 (C) .

$$(A) \quad \iiint_{\Omega_1} xdv = 4 \iiint_{\Omega_2} xdv \quad (B) \quad \iiint_{\Omega_1} ydv = 4 \iiint_{\Omega_2} ydv$$

$$(C) \iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv \quad (D) \iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv$$

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} (x+y+z) dv$, 其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

解 由三重积分的轮换对称性, 有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x dv &= \iiint_{\Omega} y dv = \iiint_{\Omega} z dv, \\ \iiint_{\Omega} (x+y+z) dv &= 3 \iiint_{\Omega} z dv = 3 \iiint_{\Omega} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

【练习 12】

1. (1) 设 Ω 为 $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, 则三重积分 $\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2+1} dx dy dz$ 值是 (A).

$$(A) 0 \quad (B) \pi \quad (C) \frac{4\pi}{3} \quad (D) 2\pi$$

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} xy dv$, 其中 Ω 是由 $z = \sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=0$ 所围成的闭区域.

解 由曲面 $z = \sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=0$ 所围成的立体 Ω , 它关于 $yo z$ 面对称, 而被积函数 $f(x,y,z) = xy$ 关于变量 x 是奇函数, 所以 $I=0$.

2. (1) 计算 $\iiint_{\Omega} (x+y+z) dv$, Ω 是由圆柱 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成的闭区域.

解 由圆柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成的立体 Ω , 它关于 xoz 、 $yo z$ 面对称, 所以

$$\iiint_{\Omega} y dv = 0, \quad \iiint_{\Omega} x dv = 0.$$

$$I = \iiint_{\Omega} (x+y+z) dv = \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^3 z dz \iint_D dx dy = \pi \cdot \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^3 = \frac{9}{2} \pi.$$

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围成的闭区域.

解 $\iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dv = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx) dv,$

Ω 是球心在原点, 半径为 R 的球体, 它关于 xoy , $yo z$, zox 面均对称, 所以

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} xy dv &= \iiint_{\Omega} yz dv = \iiint_{\Omega} zx dv = 0, \text{ 于是} \\ \iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dv &= \iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2) dv = \iiint_{\Omega} r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi}{5} R^5. \end{aligned}$$

+++++

六、二重积分、三重积分的应用(求曲面面积、求体积、求质量、求质心等)

(一)【求体积】

【例 13】(1) 求由曲面 $z = x^2 + y^2$ 及 $z = 4$ 所围成立体的体积.

解 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 及 $z = 4$ 所围成的体积 Ω 在 xoy 面的投影 D_{xy} 是以原点为圆心, 以 2 为半径的圆, D_{xy} 可表示为 $\{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, 由二重积分的几何意义知,

$$\begin{aligned} V &= \iint_D 4 d\sigma - \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = 4 \times D \text{ 的面积} - \iint_D \rho^2 \rho d\rho d\theta = 4 \times \pi \times 2^2 - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \\ &= 16\pi - 2\pi \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^2 = 8\pi. \end{aligned}$$

(2) 求由上半球面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及上半锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的立体体积.

$$\text{解 } V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}} dz = \frac{4\pi}{3} (\sqrt{2} - 1).$$

【练习 13】求体积

1.(1) 由曲面 $z = x^2 + y^2$, $y = 1$, $z = 0$, $y = x^2$ 所围成的曲顶柱体的体积为 (A).

$$(A) \frac{88}{105} \quad (B) \frac{44}{105} \quad (C) \frac{22}{105} \quad (D) \frac{11}{105}$$

(2) 求由曲面 $z = 0$, $z = e^{-(x^2+y^2)}$, $x^2 + y^2 = R^2$ 所围成立体的体积.

解 利用对称性, 所求立体的体积为 $V = 4 \iint_{D_{xy}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$,

其中 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$. 于是

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

(3) 求以 $y^2 = x, x = 1$ 所围成的区域 D 为底, $f(x, y) = xy^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

$$\text{解 } V = \iint_D xy^2 dx dy = \int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^1 xy^2 dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^6}{2} \right) dy = \frac{4}{21}.$$

(4) 求由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 及 $z = 6 - 2x^2 - y^2$ 所围成立体的体积.

解 $V = \iint_D (6 - 2x^2 - y^2) d\sigma - \iint_D (x^2 + 2y^2) d\sigma$, Ω 在 xoy 面的投影 D_{xy} 是 $x^2 + y^2 \leq 2$,

$$V = \iint_D [6 - 3(x^2 + y^2)] d\sigma = \iint_D [6 - 3\rho^2] \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (6\rho - 3\rho^3) d\rho$$

$$= 2\pi(3\rho^2 - \frac{3}{4}\rho^4)_0^{\sqrt{2}} = 6\pi.$$

2. (1) 利用二重积分计算由曲面 $x+y+z=3$, $x^2+y^2=1$ 及 $z=0$ 围成立体的体积.

$$\text{解 } V = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (3-x-y) dy = 12 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 3\pi.$$

(2) 利用二重积分计算由平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (其中 $a, b, c > 0$) $x=0$, $y=0$, $z=0$ 所围立体的体积.

$$\text{解 } V = \iint_D C(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}) dx dy = C \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} (1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}) dy = C \int_0^a \frac{b}{2} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx = \frac{1}{6} abc.$$

(3) 利用二重积分计算由下列曲面 $z=x^2+y^2$, $y=1$, $z=0$, $y=x^2$ 所围成的曲顶柱体的体积.

$$\text{解 } V = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy = 2 \int_0^1 [x^2(1-x^2) + \frac{1}{3}(1-x^6)] dx = \frac{88}{105}.$$

(4) 利用二重积分计算由曲面 $z=6-x^2-y^2$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$ 及 $z=0$ 所围成的曲顶柱体的体积.

$$\text{解 } V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (6-x^2-y^2) dy = \int_0^1 [6-6x-x^2+x^3 - \frac{1}{3}(1-x)^3] dx = 2\frac{5}{6}.$$

3. (1) 求由柱面 $x=y^2$ 及平面 $z=0$, $z=1-x$ 所围成立体的体积.

$$\begin{aligned} \text{解 } V &= \iiint_{\Omega} dv = \int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^1 dx \int_0^{1-x} dz = \int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^1 (1-x) dx = \int_{-1}^1 [x - \frac{1}{2}x^2]_{y^2}^1 dy \\ &= \int_0^1 (1-2y^2+y^4) dy = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

(2) 求由 $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2=4z$ 所围成立体的体积.

解 利用柱坐标计算.

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega} \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\frac{\rho^2}{4}}^{\sqrt{5-\rho^2}} dz = 2\pi \int_0^2 \rho [\sqrt{5-\rho^2} - \frac{\rho^2}{4}] d\rho \\ &= 2\pi \int_0^2 (-\frac{1}{2}) \sqrt{5-\rho^2} d(5-\rho^2) - \frac{\pi}{2} \int_0^2 \rho^3 d\rho \\ &= -\pi [\frac{2}{3}(5-\rho^2)^{\frac{3}{2}}]_0^2 - \frac{\pi}{8} \rho^4 \Big|_0^2 = \frac{2}{3} \pi (5\sqrt{5} - 4). \end{aligned}$$

(二)、【求曲面面积】

【例 14】求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下的部分曲面的面积.

解 联立两曲面方程, $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2x \end{cases}$ 解得 $x^2+y^2=2x$, 所以曲面在 xoy 面上的投影区域

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\}, \text{ 被割曲面的方程为 } z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$dS = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy, \text{ 于是所求曲面的面积为}$$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \times D \text{ 的面积} = \sqrt{2}\pi.$$

【练习 14】求曲面面积

1. (1) 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = x$ 所截下部分的面积.

解 将所求曲面投影到 xoy 面上, 投影区域 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq x\}$, D_{xy} 的面积为 $\sigma = \frac{\pi}{4}$.

由曲面方程 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 有 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy,$$

故所求曲面的面积为 $S = \iint_{D_{xy}} \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2}\sigma = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

(2) 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ 所割下的部分曲面的面积.

解 锥面被割下部分的面积 S

由于锥面方程 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy,$$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \times D \text{ 的面积} = \sqrt{2}\pi a^2.$$

(3) 求平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 被三坐标面所割出的有限部分的面积.

解 平面的方程可写为 $z = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$, 所割部分在 xOy 面上的投影区域为

$$D = \{(x, y) | \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} dx dy \\ &= \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} \iint_D dx dy = \frac{1}{2} ab \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}}. \end{aligned}$$

2. (1) 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 含在圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 内部的那部分面积.

解 位于柱面内的部分球面有两块, 其面积是相同的.

由曲面方程 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 得 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$,

$$\begin{aligned} \text{于是 } A &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq ax} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq ax} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho d\rho = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a - a \sin \theta) d\theta = 2a^2(\pi - 2). \end{aligned}$$

(2) 求底圆半径均为 R 的两直交圆柱面所围立体的表面积.

解 设两直交圆柱面方程分别为 $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2 + z^2 = R^2$

由于所求曲面有对称性, 只需求圆柱面 $x^2 + z^2 = R^2$ 上位于第一卦限部分的表面积 S_1 , $S = 16S_1$

曲面方程 $z = \sqrt{R^2 - x^2}$, $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx dy$, 其投影区域

$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$. 于是

$$S_1 = \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx dy = R \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} dy = R \int_0^R dx = R^2,$$

故全体表面积 $S = 16R^2$.

(三) 【求质量或质心、转动惯量】

【例 15】(1) 设平面薄片所占的区域 D 是由 $x + y = 2$, $y = x$ 和 $y = 0$ 所围成, 它的面密度

$\rho(x, y) = x^2 + y^2$, 求该薄片的质量.

解 由二重积分物理意义知, $M = \iint_D \rho(x, y) d\sigma = \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$,

D 可表示为 $y \leq x \leq 2 - y$, $0 \leq y \leq 1$,

$$\text{所以 } M = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x^2 + y^2) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x^3 + xy^2 \right]_y^{2-y} dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} (2-y)^3 + 2y^2 - \frac{7}{3} y^3 \right] dy = \frac{4}{3}.$$

(2) 利用三重积分求由曲面 $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1$ 所围成立体的质心 (设密度 $\rho = 1$).

解 由于密度是常数, Ω 的几何形状关于 xoz , $yozy$ 面对称, 所以 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z \rho dv}{\iiint_{\Omega} \rho dv}.$$

已知 $\rho = 1$, 所以 $\iiint_{\Omega} z \rho dv = \iiint_{\Omega} z dv = \iiint_{\Omega} z \cdot \rho d\rho d\theta dz$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho}^1 z dz = 2\pi \int_0^1 \rho \frac{1}{2} z^2 \Big|_{\rho}^1 d\rho = \pi \int_0^1 \rho (1 - \rho^2) d\rho = \frac{\pi}{4};$$

$$\iiint_{\Omega} \rho dv = \iiint_{\Omega} dv = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{\pi}{3};$$

故 $\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z \rho dv}{\iiint_{\Omega} \rho dv} = \frac{3}{4}$ 。立体的质心坐标是 $(0, 0, \frac{3}{4})$ 。

【练习 15】求质量或质心、转动惯量

1. (1) 已知平面薄片 D 由 $y = x^2$ 及直线 $y = x$ 所围成, 面密度函数为 $\rho(x, y) = x^2 y$, 求其质量。

解 $M = \iint_D \rho(x, y) d\sigma = \iint_D x^2 y d\sigma = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x x^2 y dy = \frac{1}{35}$ 。

(2) 设有一物体, 占有空间区域 $\Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, 在点 (x, y, z) 处的密度函数为 $\rho = x^2 + y^2 + z^2$, 计算该物体的质量。

解 $M = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dz = \int_0^1 dx \int_0^1 [(x^2 + y^2)z + \frac{1}{3}z^3]_0^1 dy$
 $= \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2 + \frac{1}{3}) dy = 1$ 。

(3) 设抛物面壳 $\Sigma: z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) (0 \leq z \leq 1)$, 且 Σ 上点 (x, y, z) 处的面密度为 $\rho = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$,

求此壳的质量。

解 $\Sigma: z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), z_x = x, z_y = y \quad D: x^2 + y^2 \leq 2$

$$M = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dxdy = \iint_D dxdy = 2\pi$$

2. (1) 求位于两圆 $\rho = 2\sin\theta$ 和 $\rho = 4\sin\theta$ 之间的均匀薄片的质心。

解 因为闭区域 D 关于 y 轴对称, 且平面薄片是均匀的, 所以质心必位于 y 轴上, 于是

$$\bar{x} = 0,$$

且 $\bar{y}$ 由公式 $\bar{y} = \frac{\iint_D y d\sigma}{D \text{ 的面积}}$ 计算。

$$\begin{aligned} \iint_D y d\sigma &= \iint_D \rho \sin\theta \rho d\rho d\theta = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{56}{3} \int_0^\pi \sin^4\theta d\theta = \frac{56}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt \\ &= \frac{56}{3} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{56}{3} \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$= 7\pi。$$

因此, $\bar{y} = \frac{7\pi}{3\pi} = \frac{7}{3}$, 所求质心为 $C(0, \frac{7}{3})$ 。

(2) 求半径为 a 、高为 h 的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量(设密度 $\rho=1$)。

解 建立坐标系, 使圆柱体的底面在 xOy 面上, z 轴通过圆柱体的轴心. 用柱面坐标计算.

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho dv = \iiint_{\Omega} r^3 dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr \int_0^h dz = \frac{1}{2} \pi h a^4.$$