

第十二章 无穷级数

一、常数项级数概念与性质

1. 【利用定义法求级数的和】

【例 1】1. 判别级数 $\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \cdots$ 的敛散性, 若收敛则求级数的和.

2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$ 的敛散性; 若收敛则求级数的和.

【练习 1】利用定义法求级数的和

3. 下列级数中不收敛的是 ().

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{4^n}$

4. 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 是级数收敛的 () 条件.

A. 充分 B. 充分且必要 C. 必要 D. 既不充分也不必要

5. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和为 2, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (2u_n - \frac{3}{2^n})$ 的和为 ().

A. 0 B. 1 C. -2 D. $+\infty$

6. 下列命题中正确的是 ().

A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散 B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n + v_n$ 发散
C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n + v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛 D. 若数列 $\{u_n\}$ 有界, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

7. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 的敛散性; 若收敛则求级数的和.

8. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2 + 5n + 6}$ 的敛散性, 若收敛求级数的和.

9. 级数 $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots$ 的和.

10. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln^n 3}{2^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ 的和.

2. 【判断级数的发散】

【例 2】11. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ 的敛散性.

12. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{1+n} \right)^n$ 的敛散性.

【练习 2】【判断级数的发散】

13. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 的敛散性.

14. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ 的敛散性, 若收敛求级数的和.

15. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2}$ 的敛散性.

二、正项级数及其审敛法

3. 【利用正项级数敛散性的判别法判断级数的敛散性】

【例3】1. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$ 的敛散性.

2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^6}$ 的敛散性.

3. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^{n^2}$ 的敛散性.

【练习3】正项级数判别法：充要条件、比较、比值、根值法

4. 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的 () 条件.

- A. 充分 B. 充分且必要 C. 必要 D. 既不充分也不必要

5. 下列命题中正确的是 () .

A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛 B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛

C. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $u_n \geq \frac{1}{n}$ D. 若 $u_n < v_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

6. 设有以下命题: 不正确的是 () .

A. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1000}$ 收敛

C. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $u_n \geq v_n$ ($n=1, 2, \dots$), 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛

D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 不一定都收敛

7. 下列命题中正确的是 ().

A. 若 $u_n < v_n$ ($n=1,2,3,\dots$), 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

B. 若 $u_n < v_n$ ($n=1,2,3,\dots$), 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

C. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

D. 若 $w_n < u_n < v_n$ ($n=1,2,3,\dots$), 且 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

8. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则 ().

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散 B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 发散 C. $\sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)$ 发散 D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + v_n^2)$ 发散

9. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 ().

A. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 小于 1

B. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 小于等于 1

C. 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在, 其值小于 1

D. 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在, 其值小于等于 1

10. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 下列命题中错误的是 ().

A. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

B. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

C. 如果 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

D. 如果 $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

11. 判别级数 $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{5} + \dots$ 的敛散性.

12. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$ 的敛散性.

13. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ 的敛散性.

14. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^n}$ 的敛散性.

15. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛. 证明下列级数也收敛:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}.$$

(二) 一般常数项级数

4. 【判断级数绝对收敛、条件收敛】

【例 4】1. 判断级数 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \cdots$ 是绝对收敛还是条件收敛, 并写出证明过程.

2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性, 若收敛, 则说明是绝对收敛还是条件收敛.

【练习 4】【判断级数绝对收敛、条件收敛】

3. 判断级数 $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \cdots$ 是绝对收敛还是条件收敛, 并写出证明过程.

4. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n^2}$ 的敛散性, 若收敛, 则说明是绝对收敛还是条件收敛.

5. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$ 是否收敛, 若收敛, 指出是绝对收敛还是条件收敛.

6. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 是否收敛, 若收敛, 指出是绝对收敛还是条件收敛.

7. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right]$ 的敛散性.

三、幂级数

5. 【求收敛半径和收敛域】

【例 5】1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \cdot n}$ 的收敛半径及收敛域.

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ 的收敛域.

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ 的收敛域.

【练习 5】【求收敛半径和收敛域】

4. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径及收敛域.

5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{3^n}$ 的收敛半径及收敛域.

6. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}} x^n$ 的收敛域.

7. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n \cdot n}$ 的收敛域.

8. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域 ().

A. (4,6)

B. [4,6)

C. (4,6]

D. [4,6]

9. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n} x^n$ 的收敛半径是_____.

10. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 4, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ 的收敛半径是_____.

11. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{2n}$ 在处 $x=2$ 条件收敛, 则其收敛域为_____.

12. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n}$ 的收敛半径为_____.

13. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3^n x^{2n}$ 的收敛半径是_____.

6. 【求幂级数的和函数】

【例 6】 1. 求幂函数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的收敛区间及和函数.

2. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 在 $(-1,1)$ 内的和函数.

3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

【练习 6】【求幂级数的和函数】

4. 求级数 $2x + 4x^3 + 6x^5 + 8x^7 + \cdots$ 的收敛区间, 并求和函数.

5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(n+1)x^n$ 在收敛区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x)$, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

6. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数 $S(x)$.

7. 求 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots$ 的收敛区间, 并求和函数.

8. 求 $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ 的收敛区间, 并求和函数.

9. 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 在其收敛域内的和函数.

10. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$ 的和函数.

11. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的和函数.

12. 求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

13. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ 的和.

四、函数展成幂级数及其幂级数的应用

7. 【间接法函数展成幂级数】

【例 7】1. 将函数 $f(x) = \frac{1}{3-x}$ 在 $x=1$ 处展开成幂级数.

【练习 7】【间接法函数展成幂级数】

2. 将函数 $f(x) = \frac{1}{5-x}$ 展开为 $(x-2)$ 的幂级数.

3. 将 $\frac{1}{x}$ 展开为 $(x-2)$ 幂级数.

3. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

5. 将 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$ 展开为 $(x+1)$ 的幂级数.

6. 将 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$ 展开成 x 的幂级数.

7. 将 $f(x) = e^{2x}$ 展开成 x 的幂级数.

8. 将函数 $\sin^2 x$ 展开为 x 的幂级数.

9. 将 $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ 展开成 x 的幂级数.

10. 将 $f(x) = \arctan x$ 展开成麦克劳林级数.

11. 将 $y = \frac{1}{x^2}$ 在点 $x_0 \neq 0$ 处展开成泰勒级数.

12. 求 $f(x) = xe^x$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开式.

五、傅里叶级数

8. 【求傅里叶级数】

1. $f(x)$ 是以周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi]$ 的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}, \quad f(x) \text{ 的傅立叶级数的和函数为 } S(x), \text{ 则 } S(\pi) = (\quad).$$

A. $-\frac{\pi}{2}$

B. $-\pi$

C. 0

D. 其它值

【练习 8】【求傅里叶级数】

2. 设在区间 $(0, \pi)$ 内, $f(x) = \frac{\sin x}{\pi x - x^2}$, 若 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 π 为周期的傅立叶级数展开式的和函数, 则 $S(2\pi) =$ _____.

3. 周期为 2 的函数 $f(x) = x^2 + 1, (-1 \leq x < 1)$, 且 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, (-\infty < x < +\infty)$, 则 $a_0 =$ _____.

4. 设函数 $f(t)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 内的表达式为 $f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < \pi \end{cases}$,

将 $f(t)$ 展开为傅里叶级数, 并讨论其收敛性.

5. 将函数 $f(x) = x, (0 \leq x \leq \pi)$ 展开成正弦级数. 6. 将函数 $f(x) = x, (0 \leq x \leq \pi)$ 展开余弦级数.

7. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 且 $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$, 写出 $f(x)$ 的傅里叶级数与其和函数, 并

求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和.

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -\pi & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$, 不具体将 $f(x)$ 展为傅里叶级数,

求: (1) $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi, \pi]$ 中是否收敛; (2) $f(x)$ 的傅里叶级数在 $-\pi, -1, 0, 1$ 处的和分别等于多少?

9. 将函数 $f(x) = x, \quad -\pi \leq x < \pi$ 展开为傅氏级数.