

第九章 多元函数微分法及其应用

一、二元函数的定义域、二重极限判断与求值、多元函数的连续

1. 【求函数的定义域、二重极限判断与求值、多元函数的连续性】

【例 1-1】1. 函数 $y = \sqrt{y-x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 的定义域为_____.

【例 1-2】2. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = ()$.

A. 等于 0 B. 不存在 C. 等于 $\frac{1}{2}$ D. 存在且不等于 0 或 $\frac{1}{2}$

【例 1-3】3. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \pi}} \frac{\sin(xy)}{x} =$ _____.

【练习 1】【求函数的定义域、二重极限判断与求值、多元函数的连续性】

4. 函数 $z = \arctan \frac{y}{\sqrt{1-x}}$ 的定义域为_____.

5. 函数 $z = \frac{\arcsin x}{y}$ 的定义域为_____.

6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y} ()$

A. 等于 0 B. 不存在 C. 等于 $\frac{1}{2}$ D. 存在且不等于 0 或 $\frac{1}{2}$

7. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + e^y}{\cos y - \sin x} =$ _____.

8. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy} =$ _____.

9. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$ _____.

二、偏导数、高阶偏导数与全微分

2. 【求偏导数、高阶偏导数、全微分】

【例 2-1】1. 设 $z = x + (y-2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$, 那么 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,2)} = ()$.

A. 0 B. 1 C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

【例 2-2】2. $u = xy + \frac{y}{x}$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$ _____.

【例 2-3】3. 设 $z = (1+x)^y$, 则 $dz =$ _____.

【练习 2-1】【求偏导数】

4. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续是它在该点偏导数存在的 ().

(A) 必要而非充分条件 (B) 充分而非必要条件 (C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

5. 设函数 $f(x, y)$ 在 (a, b) 的偏导数存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x, b) - f(a-x, b)}{x} = ()$.

(A) 0 (B) $f_x(2a, b)$ (C) $f_x(a, b)$ (D) $2f_x(a, b)$

6. 若 $f(x, 2x) = x^2 + 3x$, $f'_x(x, 2x) = 6x + 1$, 则 $f'_y(x, 2x) = ()$.

(A) $x + \frac{3}{2}$ (B) $x - \frac{3}{2}$ (C) $2x + 1$ (D) $-2x + 1$

7. 若 $f(x, x^2) = x^3$, $f'_x(x, x^2) = x^2 - x^4$, 则 $f'_y(x, x^2) = ()$.

(A) $2x^2 + 2x^4$ (B) $x + x^3$ (C) $x^2 + x^5$ (D) $2x + 2x^2$

8. 曲线 $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$ 在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线与 x 轴正向所成的倾角是多少?

9. 设 $f(x, y) = xye^x$, 则 $f_x(1, x) = ()$.

(A) 0 (B) e (C) $2xe$ (D) $1+ex$

10. 设 $f(x, y) = \arcsin \sqrt{\frac{y}{x}}$, 则 $f'_x(2, 1) = ()$.

(A) $-\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

11. 设 $z = (1+x)^{x+y}$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,1)} = ()$.

(A) $1+\ln 2$ (B) $4(1+\ln 2)$ (C) 4 (D) 8

12. 求函数 $z = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt$ 的偏导数

13. 设 $z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$, 其中 $\varphi(u)$ 可导, 证明 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 = xy \frac{\partial z}{\partial y}$.

【练习 2-2】【求高阶偏导数】

14. 设 $u = x \ln xy$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} =$ _____.

15. 设 $u = x^2 \sin y + y^2 \cos x$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} =$ _____.

【练习 2-3】【求全微分】

16. 设 $z = x^3 y^2 - x^2 - e^y$, 则 $dz =$ _____.

17. 设 $f(x, y, z) = \ln(xy + z)$, 则 $df(1, 2, 0) =$ _____.

18. 设 $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$ ($f(x, y)$ 具有一阶连续导数), 求 du .

19. 设 $z = f(x, y)$ 是由方程 $z - y - x + xe^{z-y-x} = 0$ 所确定的二元函数, 求 dz .

三、复合函数求导法则、隐函数求导公式(解答题、证明题)**3. 【求多元复合函数的导数、隐函数的导数】**

【例 3-1】 1. 设 $z = e^{3x+2y}$, $x = \cos t$, $y = t^2$, 则 $\frac{dz}{dt} =$ _____.

2. 设 $z = ue^v$, 其中 $u = x^2 + y^2$, $v = xy$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

3. 求函数 $z = f(xy, y)$ 的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (其中 f 具有二阶连续偏导数)

【例 3-2】4. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\sin x + 2y - z = e^z$ 所确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ ____.

5. 设 z 为由方程 $f(x+y, y+z) = 0$ 所确定的函数, 求 $dz, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

6. 证明由方程 $F(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 满足关系式 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$, 其中 F 具有连续的一阶偏导数.

【练习 3-1】【求多元复合函数的导数】

7. 若 $z = f(x^2 + y^2)$, 则 $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

8. 设 $z = xf(x, y)$, $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,1)} = 2$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,1)} =$ _____.

9. 求函数 $z = f(\frac{y}{x}, x^2 y)$ 的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (其中 f 具有二阶连续偏导数)

【练习 3-2】【求多元隐函数的导数】

10. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^z - z + xy = 3$ 所确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.
11. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$ 所确定, 则全微分 $dz =$ _____.
12. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $xyz = a$ (a 为非零常数) 所确定, 证明: $xz_x + yz_y = -2z$.
13. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $3\cos(x + 2y + 3z) = x + 2y + 3z$ 所确定, 试证 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -1$.
14. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $1 + x + 2y - z = e^z$ 所确定, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
15. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $f(y - x, yz) = 0$ 所确定, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
16. 设函数 $z = f(x, y)$ 由方程 $F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$ 所确定, 证明 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

四、求空间曲线切线和法平面方程、求空间曲面的切平面和法线方程

4. 【求空间曲线切线和法平面方程、求空间曲面的切平面和法线方程】

【例 4-1】1. 曲线 $x = 2 \sin t, y = 4 \cos t, z = t$ 在点 $(2, 0, \frac{\pi}{2})$ 处的法平面方程是 ().

(A) $2x - z = 4 - \frac{\pi}{2}$ (B) $2x - z = \frac{\pi}{2} - 4$ (C) $4y - z = -\frac{\pi}{2}$ (D) $4y - z = \frac{\pi}{2}$

2. 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z = x^2 - y^2 \end{cases}$ 在点 $(1, 2, -3)$ 处的切线方程为 ().

(A) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{8}$ (B) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-8}$ (C) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{8}$ (D) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{8}$

【例 4-2】3. 曲面 $x^3 - 2xy - xz^2 - y^2z = 11$ 在点 $(3, 1, -2)$ 处的法线方程是 ().

(A) $\frac{x-3}{21} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{11}$ (B) $\frac{x-3}{21} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{11}$ (C) $\frac{x+18}{21} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+13}{11}$ (D) $\frac{x-3}{21} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{-11}$

4. 曲面 $z = 2x^2 + 3y^2$ 在点 $(1, 2, 14)$ 处的切平面方程为 ().

(A) $4x + 12y + z = 14$ (B) $4x + 12y + z = 42$ (C) $4x + 12y - z = 42$ (D) $4x + 12y - z = 14$

【练习 4-1】【求空间曲线的切线和法平面方程】

5. 曲线 $x = t, y = -t^2, z = t^3$ 的所有切线中, 与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的切线 ().

(A) 只有一条 (B) 只有两条 (C) 至少有三条 (D) 不存在

6. 曲线 $x = t, y = 4\sqrt{t}, z = t^2$ 在点 $(4, 8, 16)$ 处的法平面方程为 ().

(A) $x - y - 8z = -132$ (B) $x + y + 8z = 140$ (C) $x - y + 8z = 124$ (D) $x + y - 8z = 116$

7. 曲线 $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x^2 - y^2 - z^2 = -2 \end{cases}$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的法平面方程为 ().

(A) $x + y + z = 0$ (B) $x + y = 0$ (C) $2x + y + z = 0$ (D) $y + z = 0$

8. 曲线 $4x = y^5, y = \sqrt{z}$ 在点 $(8, 2, 4)$ 处的切线方程是 ().

(A) $\frac{x-8}{20} = y - 2 = \frac{z-4}{4}$ (B) $\frac{x+12}{20} = y = \frac{z+4}{4}$ (C) $\frac{x-8}{5} = y - 2 = \frac{z-4}{4}$ (D) $\frac{x-3}{5} = y - 1 = \frac{z}{4}$

9. 求曲线 $x = 2t - t^2, y = t, z = t^3 - 9t$ 上的点, 使曲线在该点处的切线垂直于平面 $2x - y - 3z + 1 = 0$.

10. 求曲线 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y-z=3 \end{cases}$ 上的点, 使曲线在该点的切线平行于平面 $2x+y-z=3$, 并写出曲线在该点的法平面方程.

【练习 4-2】【求空间曲面的切平面和法线方程】

11. 求圆锥曲面 $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ 在点 $(1, -1, 1)$ 处的切平面和法线方程.
12. 求旋转抛物面 $z = 2x^2 + 2y^2$ 在点 $(-1, \frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ 处的切平面和法线方程.
13. 在曲面 $3x^2 + 5y^2 + z^2 = 30$ 上求一点, 使曲面在该点处的切平面平行于平面 $3x - 2y - z = 4$, 并写出此切平面方程.
14. 求曲面 $x^2 - y^2 - z^2 + 6 = 0$ 垂直于直线 $\frac{x-3}{2} = y-1 = \frac{z-2}{-3}$ 的切平面方程.
15. 在曲面 $z = xy$ 上求一点, 使这点处的法线垂直于平面 $x + 3y + z + 9 = 0$, 写出该法线的方程.

五、方向导数与梯度

5. 【求方向导数与梯度】

【例 5-1】1. 函数 $z = xy^2$ 在点 $(1, 2)$ 沿 $\vec{a} = \{1, 1\}$ 方向的方向导数是_____.

2. 函数 $z = 2x + y$ 在点 $(1, 2)$ 沿各方向的方向导数的最大值为 ().

- (A) 3 (B) 0 (C) $\sqrt{5}$ (D) 2

【例 5-1】3. 函数 $z = 2x^2 + y^2$ 在点 $(1, 1)$ 处的梯度为 ().

- (A) $4\vec{i} + 2\vec{j}$ (B) $-4\vec{i} + 2\vec{j}$ (C) $4\vec{i} - 2\vec{j}$ (D) $-4\vec{i} - 2\vec{j}$

【练习 5】【求方向导数与梯度】

4. 函数 $f(x, y) = e^{-x} \sin(x + 2y)$ 在点 $(0, \frac{\pi}{4})$ 处沿 y 轴负向的方向导数是_____.

5. 函数 $z = \ln(x + \frac{y}{2})$ 在点 $(1, 3)$ 沿 $\vec{a} = \{1, -1\}$ 方向的方向导数是_____.

6. 设函数 $u = 2xy - z^2$, 则 u 在点 $(2, -1, 1)$ 处方向导数最大值为 ().

- (A) $2\sqrt{6}$ (B) 4 (C) 2 (D) $\{-2, -4, -2\}$

7. 函数 $z = x^2 + y^2$ 在 $(1, 1)$ 点沿 $\vec{l} = \{-1, -1\}$ 方向的方向导数为 ().

- (A) 最大 (B) 最小 (C) 0 (D) 1

8. 数量场 $u = x^2y^2 + yz^3$ 在点 $(1, 2, 1)$ 处的梯度为_____.

9. 函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在点 $M(1, 2, -2)$ 处的梯度 $\text{gradu}|_M =$ _____.

六、求多元函数的极值和最大值最小值

6. 【求多元函数的极值】

【例 6-1】1. 求 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值.

【例 6-2】2. 修建一座容积为 V ，形状为长方体的厂房，已知屋顶每单位面积的造价是墙壁每单位面积造价的两倍，地面造价不计，问如何设计，可使其造价最低？

【练习 6-1】【求多元函数的极值-无条件极值】

3. $z_x(x_0, y_0) = 0$ 和 $z_y(x_0, y_0) = 0$ 是函数 $z = z(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极大值或极小值的 () .

(A) 必要条件但非充分条件

(B) 充分条件但非必要条件

(C) 充要条件

(D) 既非必要条件也非充分条件

4. 求函数 $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$ 的极值.

5. 求函数 $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ 的极值.

6. 求函数 $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$ ($x > 0, y > 0$) 的极值.

7. 求由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ 确定的函数 $z = f(x, y)$ 的极值。

【练习 6-2】【求多元函数的极值-拉格朗日乘数法】

8. 造一容积为 V 形状为圆柱体的煤气罐, 已知其顶部和侧壁每单位面积的造价分别是底部每单位面积造价的 2 倍和 3 倍, 问如何设计, 方能使其造价最低?

9. 利用拉格朗日乘数法, 在曲面 $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ 上求一点, 使它到点 $(1,1,0)$ 的距离最短, 并求最短距离.

10. 在平面 xoy 面上求一点, 使它到 $x=0, y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线的距离平方和最小。

11. 将 π 分成三个正数的和, 使它们的正弦值之和取最大值.

七、几个概念的关系

7. 【多元函数微分学的几个关系】

【例 7】1. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处具有偏导数是它在该点存在全微分的 ().

- (A) 必要而非充分条件 (B) 充分而非必要条件 (C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

【练习 7】【多元函数微分学的几个关系】

2. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续是它在该点偏导数存在的 ().

- (A) 必要而非充分条件 (B) 充分而非必要条件 (C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

3. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的二阶偏导数 $f_{xy}(x, y)$ 及 $f_{yx}(x, y)$ 都存在, 则 $f_{xy}(x, y)$ 及 $f_{yx}(x, y)$ 在点 (x, y) 处连续是 $f_{xy} = f_{yx}$ 的 ().

- (A) 充分而非必要条件 (B) 必要而非充分条件 (C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

4. $z_x(x_0, y_0) = 0$ 和 $z_y(x_0, y_0) = 0$ 是函数 $z = z(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极大值或极小值的 (D).

- (A) 必要条件但非充分条件 (B) 充分条件但非必要条件 (C) 充要条件 (D) 既非必要条件也非充分条件

5. 设函数 $f(x, y)$ 在 (x, y) 不连续, 则在点 (x, y) 处 ().

- (A) 偏导数一定不存在 (B) 全微分一定不存在 (C) 至少有一个方向的方向导数不存在 (D) 以上皆不对

6. 设二元函数 $z = f(x, y)$, 且 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 存在, 则 ().

- (A) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 一定连续 (B) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 一定不连续

- (C) $f(x, x_0)$ 在 x_0 连续, $f(x_0, y)$ 在 y_0 连续 (D) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微

7. 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的全微分存在, 则 ().

- (A) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续 (B) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 不一定连续

- (C) $f'_x(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续 (D) $f'_y(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续