

第七章 微分方程

一、判断微分方程的阶数或通解独立常数的个数

【知识 1】 1. 微分方程的阶：微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数.

2. 通解： n 阶微分方程的含有 n 个相互独立的任意常数的解.

【例 1】 (1) 微分方程 $x(y')^2 - 3y' + 4x = 0$ 的阶数是 ().

- (A) 4 阶 (B) 3 阶 (C) 1 阶 (D) 2 阶

(2) 是微分方程的解并且独立的常数个数与_____相等的为方程的通解.

【练习 1】

1. 微分方程 $y' + \sin(xy)(y')^2 - y + 5x = 0$ 是 () 微分方程.

- (A) 一阶 (B) 二阶
(C) 可分离变量的 (D) 一阶线性

2. 微分方程 $(y'')^3 + (y')^2 + xy^4 = \sin x$ 的阶数为 ().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3. 微分方程 $(y')^2 + y'(y'')^3 + xy^4 = 0$ 的阶数为 ().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

二、求可分离变量的微分方程的解

【知识 2】 可分离变量的微分方程

$$\text{形如 } \frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx, \text{ 两边积分 } \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx.$$

【例 2】 求 $(1 + 2y)xdx + (1 + x^2)dy = 0$ 的通解.

【练习 2】

1. 解微分方程 $y' = e^{2x-y}$, $y|_{x=0} = 0$.

2. 求微分方程 $y \ln x dx - x \ln y dy = 0$ 的通解.

3. 求微分方程初值问题 $\begin{cases} (1 + e^x)yy' = e^x \\ y|_{x=1} = 1 \end{cases}$ 的解.

三、求齐次方程的解

【知识 3】齐次方程

形如 $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, 解法: 换元解法: 令 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = ux$, 则 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

【例 3】求微分方程 $x(\ln x - \ln y)dy - ydx = 0$ 的通解.

【练习 3】

1. 求方程 $xy \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ 满足初始条件 $y|_{x=e} = 2e$ 的特解.

2. 求微分方程 $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$ 的通解.

3. 求方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解.

四、求一阶线性非齐次微分方程的解

【知识 4】 一阶线性非齐次微分方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

其通解为 (常数变易公式): $y = e^{-\int P(x)dx} [\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C]$

【例 4】 求 $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ 的通解.

【练习 4】

1. 求微分方程 $x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0$ 满足 $y|_{x=e} = 1$ 的特解.

2. 求一曲线的方程, 这曲线通过原点, 并且它在点 (x, y) 处的切线斜率等于 $2x + 3y$.

3. 设连续函数 $y(x)$ 满足方程 $y(x) = \int_0^x y(t) dt + e^x$, 求 $y(x)$.

五、判断一阶微分方程的类型

【知识 5】

1. 可分离变量型 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$;

2. 齐次微分方程形如 $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

3. 一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

4. 伯努利方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ ($n \neq 0, 1$)

【例 5】 方程 $(y - \ln x)dx + xdy = 0$ 是 ().

(A) 可分离变量的微分方程

(B) 齐次方程

(C) 一阶非齐次线性微分方程

(D) 一阶齐次线性微分方程

【练习 5】

1. $y^2 dx + (x^2 - xy) dy = 0$ 的方程类型是 ().

(A) 齐次方程 (B) 一阶线性微分方程 (C) 可分离变量的微分方程 (D) 全微分方程

2. 微分方程 $(e^{x+y} - e^x) dx + (e^{x+y} + e^y) dy = 0$ 为 ().

(A) 齐次方程 (B) 伯努利方程 (C) 一阶线性非齐次方程 (D) 可分离变量的微分方程

3. 下列方程中, 是一阶线性微分方程的为 ().

(A) $x(y')^2 - 2yy' + x = 0$

(B) $xy + 2yy' - x = 0$

(C) $xy' + x^2 y = x + 3$

(D) $(7x - 6y) dx + (x + y) dy = 0$

六、求可降解的高阶微分方程的解**【知识 6】** 可降阶型

1. $y^{(n)} = f(x)$ 型;

2. $y'' = f(x, y')$ 型, 解法: 设 $y' = p(x)$, 方程化为 $p' = f(x, p)$;

3. $y'' = f(y, y')$ 型, 解法: 设 $y' = p(y)$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 方程化为 $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$.

【例 6】 (1) 设 $y'' = \sin x$, 则 $y =$ _____.

(2) 微分方程 $xy'' - y' = 0$ 满足条件 $y'(1) = 1, y(1) = \frac{1}{2}$ 的解是 ().

(A) $y = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}$ (B) $y = \frac{x^2}{2}$ (C) $y = x^2 - \frac{1}{2}$ (D) $y = -x^2 + \frac{1}{2}$

(3) 微分方程 $y'' - 2yy'^3 = 0$ 满足条件 $y'(0) = -1, y(0) = 1$ 的解是 ().

(A) $\frac{y^3}{3} = x + \frac{1}{3}$ (B) $\frac{x^3}{3} = y - 1$ (C) $\frac{y^3}{3} = -x + \frac{1}{3}$ (D) $\frac{x^3}{3} = -y + 1$

【练习 6】

1. 求 $y'' = x$ 的经过点 $M(0, 1)$ 且在此点与直线 $y = \frac{x}{2} + 1$ 相切的积分曲线为_____.

2. 求微分方程 $(1+x^2)y'' = 2xy$ 满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=3$ 的特解.

3. 求 $y^2 y'' + 1 = 0$ 的积分曲线方程, 使积分曲线通过点 $(0, \frac{1}{2})$, 且在该点出的斜率为 2.

七、线性方程的解的结构

【知识 7】

1. 二阶线性齐次微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ①

(1) 若 y_1 和 y_2 是齐次①的两个解, 则 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 也是齐次①的解.

(2) 若 y_1 和 y_2 是齐次①的两个线性无关的特解, 则齐次①的通解为 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

2. 二阶线性非齐次微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) (f(x) \neq 0)$ ②

(1) 若 y_1 和 y_2 是非齐次②的两个解, 则 $y_1 - y_2$ 其相应齐次①的解.

(2) 若 Y 是齐次①的通解, y^* 是齐次②的特解, 则非齐次②的通解为 $y = Y + y^*$.

【例 7】设 y_1, y_2 是二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个解, 则下列说法不正确的是().

(A) $y_1 + y_2$ 是此方程的一个解

(B) $y_1 - y_2$ 是此方程的一个解

(C) $c_1 y_1 + c_2 y_2$ 是此方程的通解 (c_1, c_2 为任意常数)

(D) 若 y_1, y_2 线性无关, 则 $c_1 y_1 + c_2 y_2$ 是此方程的通解 (c_1, c_2 为任意常数)

【练习 7】

1. 若 y_1, y_2, y_3 是二阶非齐次线性微分方程 $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$ 的线性无关的特解,

C_1, C_2 为任意常数, 则该方程的通解是 ()

A. $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_1$ B. $C_1(y_1 - y_2) + C_2(y_2 - y_3)$

C. $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$ D. $C_1y_1 + C_2y_2 + y_2 - y_3$

2. 若 $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}, y_3 = x + e^x$ 是二阶非齐次线性微分方程 $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$ 的解,

C_1, C_2 为任意常数, 则该方程的通解是 ()

A. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + x$ B. $y = C_1(x + e^x) + C_2e^{-x} + x$

C. $y = C_1(x + e^x) + C_2e^x + e^{-x}$ D. $y = C_1x + C_2(e^x - e^{-x}) + e^x$

3. 设方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的三个解为 $y_1 = x, y_2 = e^x, y_3 = e^{2x}$, 求此方程满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 3$ 的解()

A. $y = e^x + 2e^{2x}$ B. $y = -e^x - 2e^{2x}$ C. $y = e^x + 2e^{2x}$ D. $y = -e^x + 2e^{2x}$

八、求二阶常系数齐次微分方程的解

【知识 8】二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$

解法	列出特征方程: $r^2 + pr + q = 0$, 求得特征根 r_1, r_2	
	不等实根 r_1, r_2	通解 $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$
	相等实根 $r_1 = r_2$	通解 $y = C_1e^{r_1x} + C_2xe^{r_1x}$
	一对共轭复根 $\alpha \pm i\beta$	通解 $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

【例 8】(1) 微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解为_____.

答案: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$

(2) 在下列微分方程中, 其通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ 的是 () .

(A) $y'' - y' = 0$ (B) $y'' + y' = 0$ (C) $y'' + y = 0$ (D) $y'' - y = 0$

(3) 若方程 $y'' + py' + qy = 0$ (p, q 均为实常数) 有特解 $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$, 则 p 等于____,
 q 等于_____.

【练习 8】

1. 求微分方程 $y'' - 2y' + 2y = 0$ 的一条积分曲线, 使其在点 $(0, 1)$ 处有水平切线.
2. 试建立一个二阶常系数齐次线性微分方程, 已知其特征方程的一个特征根为 $r_1 = 3 + 2i$, 并求出该方程的通解.
3. 求微分方程的 $y^{(4)} - 2y''' - 2y'' = 0$ 的通解.

九、求二阶常系数非齐次微分方程的解

【知识 9】

二阶常系数非齐次线性微分方程	形如 $y'' + py' + qy = f(x)$	
	$f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$	特解为 $y^* = x^k Q_m(x)e^{\lambda x}$, k 按 λ 不是特征根, 是单根, 是重根, 分别取 0, 1, 2。
	$f(x) = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x)$	特解 $y^* = x^k e^{\alpha x} (Q_l(x) \cos \beta x + R_l(x) \sin \beta x)$, 其中 k 按 $\alpha \pm i\beta$ 不是特征根, 是特征根分别取 0, 1; $l = \max\{m, n\}$ 。

【例 8】(1) 已知 $y = 2x^2 - 7$ 是微分方程 $y'' + y = 2x^2 - 3$ 的一个特解, 则其通解为 ()。

(A) $x = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2x^2 - 7$ (B) $x = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 2x^2 - 7$

(C) $x = c_1 + c_2 e^{-x} + 2x^2 - 7$ (D) $x = (c_1 + c_2 x)e^x + 2x^2 - 7$

(2) 微分方程 $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$ 的特解形式为 ()。

(A) $(Ax + B)e^{2x}$ (B) $x(Ax + B)e^{2x}$ (C) $x^2(Ax + B)e^{2x}$ (D) $Ax^3 e^{2x}$

(3) 若 $f(x)$ 是方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = \sin 2x$ 的一个特解, 则方程的通解为 ().

(A) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$

(B) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + f(x)$

(C) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

(D) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + f(x)$

【练习 9】

1. 求微分方程 $y'' - y' - 6y = 3x^2 + x + 1$ 的一个特解.

2. 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = 3xe^{2x}$ 的一个通解.

3. 求方程 $y'' - y = 4xe^x$, $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$ 的特解.