

第六章 定积分的应用

一、定积分在几何学上的应用

【知识 1】求面积：直角坐标系下和极坐标系下

【例 1】(1) 求由曲线 $y = \ln x$ 及直线 $y = 1 + x, x = 1, x = e$ 所围成的平面图形的面积.

解:

(2) 求由曲线 $y = \ln x$, $y = 0$, $y = \ln a$ 及 $y = \ln b$ 所围图形的面积.

(3) 求由曲线 $r = 2a \cos \theta$ 所围图形的面积

【练习 1】

1. (1) 求两曲线 $y = \frac{1}{x}$, $y = x$ 与 $x = 2$ 所围图形的面积.

(2) 求由曲线 $y = e^x$, $y = e^{-x}$ 及 $x = 1$ 所围图形的面积.

(3) 求由曲线 $y^2 = x$ 与 $y^2 = -x + 4$ 所围图形的面积

2. 求对数螺线 $\rho = ae^\theta$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) 及射线 $\theta = \pi$ 所围图形的面积

3. 求 a 为何值时, 使曲线 $y^2 = ax$ ($a > 0$) 与 $y = x^2$ 所围成的平面图形的面积为 9.

【知识 2】求体积

1. 绕 x 轴旋转: $V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$; 绕 y 轴旋转: $V = \int_c^d \pi \varphi^2(y) dy$

2. 柱壳法: 绕 x 轴旋转: $V = \int_c^d 2\pi y \varphi(y) dy$; 绕 y 轴旋转: $V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$

【例 2】 (1) 求由曲线 $y = \sqrt{x}$ 和 $y = \sqrt[3]{x}$ 所围成的平面图形分别绕 x 轴及绕 y 轴旋转而成的旋体的体积.

(2) 求由曲线 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 与 x 轴围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所产生的旋转体体积.

【练习 2】

1. 求由曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x = 0$, $x = 1$ 及 x 轴所成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

2. 求由曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$ 及 $x = 2$ 所围成的平面图形的绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

3. 过原点 O 做曲线 $L: y = e^x$ 的切线, 记切点为 A , 由直线 OA , y 轴和曲线 L 围成的图形记为 D , 求 D 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积.

【知识 3】求弧长

1. 直角坐标 $L: y = f(x)$, $x \in [a, b]$, $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$; $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$

2. 参数方程 $L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$, $ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$, $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$

3. 极坐标 $L: r = r(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$; $ds = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$; $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$

【例 3】(1) 求曲线 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ 上相应于 $0 \leq x \leq b$ 的一段弧的长度.

(2) 求曲线 $\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} - t, \\ y = t^2 + 2, \end{cases}$ 上相应于 $0 \leq t \leq 3$ 的一段弧的长度.

(3) 求曲线 $r = \cos^2 \frac{\theta}{2}$ 上相应于 $\theta \in [0, \pi]$ 的一段弧的长度.

【练习 2】

1. 求曲线 $y = \ln \sin x$ 上相应于 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 的一段弧的长度.

2. 求曲线 $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ 上相应于 $0 \leq t \leq \ln \pi$ 的一段弧的长度.

3. 求曲线 $r = 1 + \cos \theta$ 上相应于 $\theta \in [0, \pi]$ 的一段弧的长度.

二、定积分在物理学上的应用

【知识 1】变力沿直线做功; 水压力; 引力等

【例 1】 (1) 一物体的速度为 $v = \sqrt{1+t} \text{ m/s}$, 求此物体在运动开始后前 10 秒内所经过的路径.

(2) 设一质点距原点 x 米时, 受 $F(x) = x^2 + 2x$ 牛顿力的作用, 问质点在 F 作用下, 从 $x = 1$ 移动到 $x = 3$, 力所做的功有多大?

【练习 1】

1. 设一质点运动的速度 $v = 0.2e^{-0.04t} \text{ m/s}$, 求该质点从运动的起点到运动完全停止时所经过的路程.

2. 一汽船按 $x = t^2$ 做直线航行, 水的阻力与速度平方成正比 (比例系数为 k), 汽船从静止开始向前航行 2 米, 发动机克服阻力所做的功为 ().

(A) k (B) $2k$ (C) $4k$ (D) $8k$

3. 水下由一个矩形闸门, 铅直地浸没在水中. 它的宽为 2m, 高为 3m, 水面超过门顶 2m, 则闸门上所受水的压力为 ().

(A) 245kN (B) 245N (C) 205.8N (D) 205.8kN