

第五章 定积分

一、定积分的概念与性质

【知识 1】和式极限与定积分的关系

【例 1】有定积分的定义知,和式极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【练习 1】1. 试将和式的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} (p > 0)$ 表示成定积分.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{(1 + \frac{1}{n})^2 (1 + \frac{2}{n})^2 \cdots (1 + \frac{n}{n})^2}$ 等于 ().

- (A) $\int_1^2 \ln^2 x dx$; (B) $2 \int_1^2 \ln x dx$;
(C) $2 \int_1^2 \ln(1+x) dx$; (D) $\int_1^2 \ln^2(1+x) dx$.

3. 填空 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}}] = \underline{\hspace{2cm}}$.

【知识 2】定积分的几何意义和对称性奇偶性 (“偶倍奇零”)

【例 2】(1) 定积分的几何意义 计算定积分 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 的结果为 ()

- A、 π B、 $\frac{\pi}{4}$ C、 $\frac{\pi}{3}$ D、 $\frac{\pi}{2}$

(2) “偶倍奇零” 下列积分中不为 0 的是 ().

- (A) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos x} dx$ (B) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x + \sin x}{2} dx$
(C) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\sin x}{1+x^{10}} + \frac{1}{x^2+1}) dx$ (D) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \arcsin x^2 dx$

【练习 2】

1. (1) $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2} dx = ()$.

- (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

(2) $\int_{-1}^0 |3x+1| dx = ()$.

- (A) $\frac{5}{6}$ (B) $-\frac{5}{6}$ (C) $-\frac{3}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$

(3) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = (\quad)$.

- (A) $2\pi a^2$ (B) πa^2 (C) $\frac{1}{2}\pi a^2$ (D) $\frac{1}{4}\pi a^2$

2. (1) 设 $f(x) = x^3 + x$, 则定积分 $\int_{-2}^2 f(x)dx$ 的值等于().

- (A) 0 (B) 8 (C) $\int_0^2 f(x)dx$ (D) $2\int_0^2 f(x)dx$

(2) 下列积分中值为零的是().

- (A) $\int_{-2}^1 xdx$ (B) $\int_{-1}^1 x \sin x dx$ (C) $\int_{-1}^1 x \sin^2 x dx$ (D) $\int_{-1}^1 x^2 \cos x dx$

(3) $\int_{-1}^1 x^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = \underline{\hspace{2cm}}$; (2) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin x^2 \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

3.(1) $\int_{-1}^1 (x+1+\sqrt{1-x^2})dx = (\quad)$.

- (A) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$ (B) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2} + 2$ (D) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}$

(2) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 \arcsin x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 计算定积分 $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{4-x^2})^2 dx$.

【知识 3】【利用定积分的性质比较几个定积分的大小】

【例 3】(1) $\int_0^1 x^2 dx$, $\int_0^1 x^3 dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

(3) $\int_1^0 \ln(1+x) dx$, $\int_1^0 \frac{x}{1+x} dx$

【练习 3】1. (2003 数二 11) 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$, 则()

- (A) $I_1 > I_2 > 1$. (B) $1 > I_1 > I_2$. (C) $I_2 > I_1 > 1$. (D) $1 > I_2 > I_1$.

二、变限积分

【知识 1】【变限积分】

【例 1】(1) 设函数 $f(x)$ 连续, 则 $\int_a^x f(t)dt$ 是().

(A) $f'(x)$ 的一个原函数 (B) $f'(x)$ 的原函数的一般表达式

(C) $f(x)$ 的一个原函数 (D) $f(x)$ 的原函数的一般表达式

(2) 设 $f(x)$ 为连续的奇函数, 又 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则 $F(-x) = ()$.

(A) $F(x)$ (B) $-F(x)$ (C) 0 (D) 非零常数

(3) $\frac{d}{dx} \int_a^b \arctan x dx = ()$.

(A) $\arctan x$ (B) $\frac{1}{1+x^2}$ (C) $\arctan b - \arctan a$ (D) 0

【练习 1】

1. 设函数 $\Phi(x) = \int_0^{x^2} te^t dt$, 则 $\Phi'(x) = ()$.

(A) xe^{-x} (B) $-xe^{-x}$ (C) $2x^3e^{-x^2}$ (D) $-2x^3e^{-x^2}$

2. 若已知 $g(x) = \int_x^1 e^{t^2} dt$, 则 $\frac{dg(x)}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【知识 2】【变限积分的应用】求极限; 求值;

【例 2】(1) 设 $f(x)$ 为可导函数, 且已知 $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x)dx}{x^2}$ 之值为().

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

(2) 设 $f(x)$ 连续, $x > 0$, 且 $\int_1^{x^2} f(t)dt = x^2(1+x)$, 则 $f(2) = ()$.

(A) 4 (B) $2\sqrt{2+12}$ (C) $1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (D) $12 - 2\sqrt{2}$

【练习 1】1. (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt}{x^2}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2} dt}$.

(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_a^x f(t) dt$, 其中 $f(x)$ 连续;

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}.$

2. (1) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^x f(t) dt = x(1 + \cos x)$, 则 $f(\frac{\pi}{2}) =$ _____

(2) 当 x 为何值时, $F(x) = \int_0^x t e^{-t^2} dt$ 取到极小值.

【知识 3】变限积分的“换元”的应用

【例 3】设 $f(x)$ 连续, 若 $f(x)$ 满足 $\int_0^x t f(x-t) dt = 1 - \cos x$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

【练习 3】

1. 设 $f(x)$ 是连续函数, $I = t \int_0^{\frac{s}{t}} f(tx) dx$, 其中 $t > 0, s > 0$, 则 I 的值().

(A) 依赖于 s 和 t

(B) 依赖于 s, t 和 x

(C) 依赖于 t , 不依赖于 s

(D) 依赖于 s , 不依赖于 t

2. 设 $f(x)$ 连续, 若 $f(x)$ 满足 $\int_0^1 f(xt) dt = f(x) + x e^x$, 求 $f(x)$.

3. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t) f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt}.$

三、定积分的计算法—直接积分法、换元法及分部积分法

【知识 1】直接积分法

【例 1】(1) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 则 $f(x) = (\quad)$.

- (A) $\frac{x^2}{2}$ (B) $\frac{x^2}{2} + 2$ (C) $x - 1$ (D) $x + 2$

(2) 求 $\int_{-1}^3 f(x) dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} 2+x, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0. \end{cases}$

【练习 1】

1. (1) 计算 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$.

2. 求 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 4}$.

3. 求 $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$.

【知识 2】第一换元法—凑微分

【例 2】(1) 求 $\int_1^2 (x-3)^5 dx$.

(2) 求 $\int_0^1 t e^{\frac{-t^2}{2}} dt$.

【练习 2】

1. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx$.

2. 求 $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

3. 求 $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$.

【知识 3】第二换元法—根式代换、三角代换等

【例 3】 (1) 求 $\int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{2x}} dx$.

(2) 求 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} dx$.

【练习 3】

1. (1) 求 $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5 - 4x}}$.

(2) 求 $\int_1^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$.

(3) 求 $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{2x-1}} dx$.

2. (1) 求 $\int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}-1}$.

(2) 求 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1 + \sqrt{1-x^2}}$.

(3) 求 $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

【知识 4】分部积分法

【例 4】 (1) 求 $\int_0^1 e^{\sqrt{2x+1}} dx$.

(2) 求 $\int_1^4 \ln \sqrt{x} dx$.

(3) 计算 $\int_0^{e-1} \ln(1+x) dx$.

(4) 计算积分 $\int_1^e \cos(\ln x) dx$.

【练习 4】

1.(1)求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$.

(2) 计算积分 $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$.

2.(1) 计算积分 $\int_1^e x \ln^2 x dx$.

(2) 计算积分 $\int_0^1 \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

(3) 计算积分 $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

(4) 计算积分 $\int_1^e (\ln x)^2 dx$.

3. 计算 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin 2x dx$.

【知识 5】积分法的不等式与恒等式证明 (另专题)

+++++

四、广义积分：无穷积分和瑕积分**【知识 1】无穷积分****【例 1】** 下列无穷积分收敛的是 ().

(A) $\int_0^{+\infty} \sin x dx$

(B) $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$

(C) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

(D) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

【练习 1】

1(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$;

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

2. (1) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx (a>0)$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

【知识 2】瑕积分

【例 2】(1) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{(1+x)^2} = (\quad).$

- (A) $-\frac{4}{3}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $-\frac{2}{3}$ (D) 不存在

(2) $\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx.$

【练习 2】

1. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

2. 判断积分的敛散性 $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$

3. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$