

第四章 不定积分

一、原函数和不定积分概念与性质

【知识 1】 1. $F'(x) = f(x)$ 或 $dF(x) = f(x)dx$, 则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数.

2. $f(x)$ 的全部原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分, 记为 $\int f(x)dx = F(x) + C$.

3. 性质:

$$1) \textcircled{1} \frac{d}{dx} \left[\int f(x)dx \right] = f(x) \text{ 或 } d \left[\int f(x)dx \right] = f(x)dx;$$

$$\textcircled{2} \int F'(x)dx = F(x) + C \text{ 或 } \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$2) \int [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx \pm \beta \int g(x)dx, \alpha, \beta \text{ 为非零常数.}$$

【例 1】 (1) 若 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 且 $x = at + b, a \neq 0$, 则 $\int f(t)dt = ()$.

(A) $F(x) + C$ (B) $F(at + b) + C$ (C) $\frac{1}{a} F(at + b) + C$ (D) $F(t) + C$

(2) 设 $I = \frac{d}{dx} \int f(x)dx + \frac{d}{dx} \int_3^4 f(x)dx + \int f'(x)dx$ 存在, 则 $I = ()$

A、0 B、 $f(x)$ C、 $2f(x)$ D、 $2f(x) + c$

(3) 下列等式成立的是 ()

(A) $\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$ (B) $\int f'(x)dx = f(x)$ (C) $d \int f(x)dx = f(x)$ (D) $\int df(x) = f(x)$

【练习 1】

1. (1) 若 $\int f(x)dx = x^2 e^{2x} + c$, 则 $f(x) = ()$

(A) $2xe^{2x}$ (B) $2x^2 e^{2x}$ (C) $2xe^{2x}(1+x)$ (D) xe^{2x}

(2) 如果等式 $\int f(x)e^{\frac{1}{x}}dx = -e^{\frac{1}{x}} + C$, 则 $f(x) = ()$

(A) $-\frac{1}{x}$ (B) $-\frac{1}{x^2}$ (C) $\frac{1}{x}$ (D) $\frac{1}{x^2}$

2. (1) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 则 $d[\int f(x)dx] = ()$

A、 $f(x)$ B、 $f(x) + c$ C、 $f(x)dx$ D、 $f'(x)dx$

(2) 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则结论 () 成立.

(A) $\int_a^b F(x)dx = f(b) - f(a)$ (B) $\int d(f(x)) = F(x) + C$

(C) $(\int f(x)dx)' = F(x)$ (D) $\int d(F(x)) = F(x) + C$

(3) $\int xf''(x)dx = ()$

(A) $xf'(x) - f(x) + c$ (B) $xf'(x) + c$ (C) $\frac{1}{2}x^2 f'(x) + c$ (D) $(x+1)f'(x) + c$

3.(1) 设 $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是().

- (A) $\arcsin x$ (B) $\arctan x$ (C) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$ (D) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$

(2) 若 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{1}{x}$, 则 $f'(x) = (\quad)$

- (A) $\ln|x|$ (B) $\frac{1}{x}$ (C) $-\frac{1}{x^2}$ (D) $\frac{2}{x^3}$

(3) $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln x$, 则 $f'(x) = (\quad)$.

- (A) $\frac{1}{x}$ (B) $x \ln x - x + C$ (C) $-\frac{1}{x^2}$ (D) e^x

二、不定积分的积分法

【知识点 1】第一换元法—凑微分

【例 1】(1) $\int \sin x \cos x dx$

(2) 求 $\int x e^{-2x^2} dx$.

(3) 求 $\int \frac{dx}{x(1+2 \ln x)}$.

【练习 2】

1. (1) 求 $\int (2x+5)^{10} dx$.

(2) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx$.

2. (1) $\int x \sin(2-x^2) dx$

(2) 求 $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}} dx$.

(3) 求 $\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

3. (1) 求 $\int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx$.

(2) 求 $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$.

(3) 求 $\int \frac{dt}{e^t + e^{-t}}$.

【知识点 2】第二换元法—根式代换、三角代换等

【例 2】 (1) 求 $\int \frac{1}{x+\sqrt{2x}} dx$. (2) 求 $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$. (3) 求 $\int x(2x-5)^6 dx$.

【练习 2】

1. (1) 求 $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} dx$. (2) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx$; (3) 求 $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx$.

2. (1) 求 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$. (2) 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. (3) 求 $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-1}}$.

3. (1) 求 $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$. (2) 求 $\int \frac{e^x}{e^{2x}-e^x} dx$.

(3) 求 $\int e^x \sqrt{1-e^{2x}} dx$. (4) 求 $\int \frac{\ln x}{x \sqrt{1+\ln x}} dx$.

【知识点 3】分部积分法

【例 3】 (1) 求 $\int x \cos 3x \, dx$.

(2) 求 $\int x \ln x \, dx$.

(3) 求 $\int \arctan x \, dx$.

(4) 求 $\int e^x \cos x \, dx$.

【练习 3】

1. (1) 求 $\int x \sin x \, dx$.

(2) 求 $\int x e^{-x} \, dx$.

(3) 求 $\int x^2 e^x \, dx$.

2. (1) 求 $\int x \arctan x \, dx$.

(2) 求 $\int \frac{1 - \ln x}{x^2} \, dx$.

(3) 求 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$.

(4) 求 $\int \arcsin x \, dx$.

3. 求 $\int e^x \sin x \, dx$.

【知识点 4】有理函数积分

【例 4】(1) 求 $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx$.

(2) 求 $\int \frac{1}{(x+1)(x-2)} dx$.

(3) 求 $\int \frac{dx}{(x^2 - 2)(x^2 + 3)}$.

【练习 4】

1.(1) $\int \frac{x^3}{x+3} dx$;

(2) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - x} dx$;

(3) 求 $\int \frac{dx}{x(x^6 + 4)}$.

2.(1) 求 $\int \frac{dx}{4 - x^4}$.

(2) 求 $\int \frac{dx}{(x^2 - 2)(x^2 + 3)}$.

3.(1) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx$;

(2) $\int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} dx$;

(3) $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + x)}$;