

第三章 微分中值定理与导数的应用

一、求极限

- 【知识 1】1. 洛必达法、等价替换、变限积分
2. 拉格朗日中值定理、泰勒公式、定积分定义

【例 1】洛必达法

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{(1 - \cos x) \sin x}$$

$$(2) \text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_a^x f(t) dt, \text{ 其中 } f(x) \text{ 连续};$$

【练习 1】

$$1.(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-x} - 3x}{1 - \cos x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}.$$

$$2.(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1+x}{x} \right]$$

$$(3) \text{求极限 } \lim_{x \rightarrow +0} (\sin 2x)^{\frac{1}{1+3 \ln x}}.$$

$$(4) \text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x}{x+1} \right)^{\frac{2x}{x-1}}.$$

$$3. (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x t e^{2t^2} dt}.$$

+++++

二、导数的应用

【知识 1】求函数的单调区间及其证题

【例 1】(1) 确定 $y = \frac{2x}{1+x^2}$ 的单调区间.

(2) 已知 $b > a > e$, 证明 $a^b > b^a$.

【练习 1】

1. 设在 $[0, 1]$ 上 $f''(x) > 0$, 则 $f'(0), f'(1), f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 几个数的大小顺序为().

(A) $f'(1) > f'(0) > f(1)-f(0)$; (B) $f'(1) > f(1)-f(0) > f'(0)$;

(C) $f(1)-f(0) > f'(1) > f'(0)$; (D) $f'(1) > f(0)-f(1) > f'(0)$.

2. 求函数 $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ 的单调区间

【知识 2】求函数的凹凸区间及拐点**【例 2】**(1) 求函数 $y=\ln(x^2+1)$ 的拐点及凹或凸的区间:(2) 问 a 、 b 为何值时, 点 $(1, 3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点?**【练习 2】**1. 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有三阶连续导数, 如果 $f'(x_0)=f''(x_0)=0, f'''(x_0)\neq 0$, 则()

- (A) x_0 是极值点, $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点 (B) x_0 是极值点, $(x_0, f(x_0))$ 不一定是拐点
(C) x_0 不是极值点, $(x_0, f(x_0))$ 是拐点 (D) x_0 不是极值点, $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点

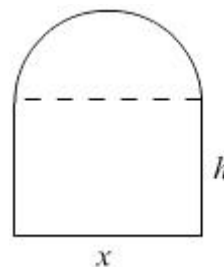
2. 求函数 $y=x^3-5x^2+3x+5$ 的拐点及凹或凸的区间:3. 试决定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a 、 b 、 c 、 d , 使得 $x=-2$ 处曲线有水平切线, $(1, -10)$ 为拐点, 且点 $(-2, 44)$ 在曲线上.

【知识3】求函数的极值与最值**【例3】**

(1) 求函数 $y = x^2 - \ln x^2$ 的极值.

(2) 试问 a 为何值时, 函数 $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值? 它是极大值还是极小值? 并求此极值.

(3) 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆(如图), 截面的面积为 5m^2 , 问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小, 从而使建造时所用的材料最省?

**【练习3】**

1. 函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续且取得极大值则 $f(x)$ 在 x_0 处必有 ()

- (A) $f'(x_0) = 0$ (B) $f''(x_0) < 0$
 (C) $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) < 0$ (D) $f'(x_0) = 0$ 或不存在

2. 函数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 在 $x = -1$ 处取得极值, 且在点 $(1, 0)$ 处与直线 $y = 2(1 - x)$ 相切, 求 a, b, c 之值

3. (1) 要造一圆柱形油罐, 体积为 V ,

(2) 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.

问底半径 r 和高 h 等于多少时, 才能使表面积最小?
 这时底直径与高的比是多少?

【考点 4】求曲线的渐近线**【例 4】**求曲线 $y^3 = 6x^2 + x^3$ 的渐近线**【考点 5】求曲率****【例 5】**求抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.**【练习 4】**1. 求曲线 $2y(x+1)^2 = x^3$ 的渐近线**【练习 5】**1. 求椭圆 $4x^2 + y^2 = 4$ 在点 $(0, 2)$ 处的曲率.2. 求曲线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ 在 $t = t_0$ 处的曲率.**三、微分中值定理****【例 1】** 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 可导, 且 $f(0) = 1, f(1) = \frac{1}{e}$,求证: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = -e^{-\xi}$.

【练习 1】

1. 设 $f(x) = \sqrt{x}$, 在 $[1,4]$ 上使得拉格朗日中值定理成立的点 $\xi =$ _____.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, 则下列不等式正确的是 ()

(A) $f'(b) > f'(a) > f(b) - f(a)$ (B) $f'(b) > f(b) - f(a) > f'(a)$

(C) $f(b) - f(a) > f'(b) > f'(a)$ (D) $f'(a) > f(b) - f(a) > f'(b)$

3. 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上存在二阶连续导数, $f'_+(1) > 0, f(1) = f(2) = 0$,

证明: 必存在 $\xi \in (1,2)$, 使 $f''(\xi) < 0$

4. 设函数 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A$, (A 为有限值).

试证: 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

5. 设 $F(x) = (x-1)f(x)$, 其中 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 具有一阶连续导数, 在 $(1,2)$ 内二阶可导, 且 $f(1) = f(2) = 0$, 试证明存在 $\xi \in (1,2)$ 使 $F''(\xi) = 0$.

6. 若函数 $f(x)$ 在 $[x_0, x_3]$ 上具有三阶导数, 且 $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$,

其中 $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ 证明: 在 (x_1, x_3) 内至少有一点 ξ , 使得 $f'''(\xi) = 0$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0) = f(1) = 1, f'(1) = 1$

证明: 在 $(0,1)$ 内存在点 c , 使 $f''(c) = 2$.

四、泰勒公式

【例 1】(1) 试写出 $f(x) = \cos x$ 的带拉格朗日型余项的 $2k+1$ 阶的麦克劳林展开式.

(2) 写出 $f(x) = \ln(1+3x)$ $\left(|x| < \frac{1}{3}\right)$ 的 n 阶麦克劳林展开式 (不要求写出余项的具体表示式).

【练习 1】

1. 试写出 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 的带拉格朗日型余项的 n 阶麦克劳林展开式 .

2. 求 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在点 $x_0 = 1$ 处的带拉格朗日型余项 的 n 阶泰勒展开式 , $(0 < x < 2)$.

3. 求 $f(x) = xe^x$ 的 n 阶麦克劳林展开式, (带拉格朗日型余项).