

第二章 导数与微分

一、导数的概念与应用

【知识 1】 1. 导数的定义 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, 或 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;

导函数定义 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

2. 左右导数 $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$; $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;

3. 导数的几何意义的应用-求切线方程 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

【例 1】(1) 设 $f(x)$ 为可导, 且有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 处的斜率为 ()

A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

(2) 设 $f(x) = x(x-1)(x-2) \cdots (x-99)(x-100)$, 则 $f'(0) = ()$

A. 100 B. 100! C. -100 D. -100!

(3) 曲线 $y = \cos x$ 在点 $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$ 处的切线方程为_____.

【练习 1】

1.(1) 设 $f(x) = (2 + |x|)\sin x$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ()

A. $f'(0) = 2$ B. $f'(0) = 0$ C. $f'(0) = 1$ D. 不可导

(2) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{1 - \cos 2x} = 1$, 其中 $f(0) = 0$, 则 $f'(0) = ()$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

(3) $y = |\sin x|$ 在 $x=0$ 处 ()

A. 连续但不可导 B. 可导但不连续 C. 连续且可导 D. 既不可导又不连续

2.(1) 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$. (2) 设 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ x - \frac{x^3}{6}, & x > 0 \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \end{cases}$, 求 $f'_-(0)$ 、 $f'_+(0)$ 及 $f'(x) (x \neq 0)$.

3. 求 a, b 的值, 使 $f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \geq 0, \\ ax + b, & x < 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导.

二、函数的求导

【知识 2】 1. 求导的四则运算、复合函数求导法、反函数求导法

2. 求高阶导数

3. 求隐函数的导数

4. 参数方程求导法

【例 1】 求导的四则运算、复合函数求导法、反函数求导法

(1) 设 $y = \sqrt{x} + \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x+1} + \cos \frac{\pi}{3}$. 求 y' .

(2) 设 $y = \tan(x + x^2)$, 则 $dy =$ _____.

(3) 设 $y = \frac{\sqrt{x}}{x+100}, 0 < x < 100$, 求反函数的导数 $x'(y)$.

【练习 1】

1. 设 $y = \tan x \cdot \ln x - x^2 \cdot 2^x \cdot \sec x + \arctan e$. 求 y' .

2. 设 $y = 2^{3x} \cdot \ln(2x) - \sqrt{1+x^2}$, 求 y' .

3. 设 $y = e^x + \sqrt{3x^2 + 1}$, $x > 0$, 求反函数的导数 $x'(y)$.

【例 2】求高阶导数

(1) 设 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 求 y' .

(2) 设 $y = f(\ln x)$, $f(x)$ 二阶可导, 求 y'' .

(3) 设 $y = x^3 \sin x$, 求 $y^{(10)}$.

(4) 设 $\varphi(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e^{tx} - 1)[f(x + \pi^2 t) - f(x)]}{t^2}$, 其中 $f(x)$ 二阶可导, 试求 $\varphi'(x)$.

【练习 2】

1. 设 $y = e^{2x} f(x^2)$, 其中 $f(u)$ 二阶可导, 求 y'' .

2. 设 $y = x^2 e^{-x}$, 求 $y^{(10)}$.

3. 设 $\varphi(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin tx [f(x + t^2) - f(x)]}{t^3}$, 其中 $f(x)$ 二阶可导, 求 $\varphi'(x)$.

【例 3】求隐函数的导数

(1) 求方程 $xy=e^{x+y}$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$

(2) 设 $y = \frac{(x+1) \cdot \sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}$, 求 y' .

(3) 设 $y = x^{\sin x} (x > 0)$, 求 y' .

【练习 3】

1. (1) 若函数 $y = f(x)$ 由方程 $y - e^y \sin x = 1$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$.

(2) 设曲面 C 的方程为 $x^3 + y^3 = 3xy$, 求过 C 上的点 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ 的切线方程, 并说明曲面 C 在该点的法线方程通过原点.

2. (1) 设 $y = \frac{(x+1)^2 \sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{x^2+1} \sqrt[3]{(2x+1)^2}}$, 求 y'

(2) 设 $y = (\frac{x}{1+x})^x$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

3. (1) 求由方程 $x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0$ 所确定的隐函数 y 的二阶导数.

(2) 设 $x^4 - xy + y^4 = 1$, 求 y'' 在点 $(0,1)$ 处的值

【例 4】参数方程求导法

【例 4】求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

【练习 4】

1. 求由方程 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ 表示的函数的二阶导数. 2. 设参数方程为 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan x \end{cases}$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

3. 求参数方程 $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$ ($f''(t)$ 存在且不等为零) 所确定函数的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$

三、函数的微分

【例 5】(1) 关于函数在点处连续、可导及可微三者的关系 ()

- (A) 连续是可微的充分条件
- (B) 可导是可微的充分必要条件
- (C) 可微不是连续的充分条件
- (D) 连续是可导的充分必要条件

(2) 若函数 $f(x)$ 有 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处微分 dy 是 ()

- (A) 与 Δx 等价的无穷小
- (B) 与 Δx 同阶的无穷小, 但不是等价的无穷小
- (C) 比 Δx 高阶的无穷小
- (D) 比 Δx 低阶的无穷小

(3) 设 $y = \ln(x + e^{x^2})$, 求 dy .

【练习 5】

1. 设 $y = f(t)$, $t = \varphi(x)$ 都可微, 则 $dy =$ ()

- A. $f'(t)dt$ B. $\varphi'(x)dx$ C. $f'(t)\varphi'(x)dt$ D. $f'(t)dx$

2. (1) 设 $y = e^{1-3x} \cos x$, 求 dy .

(2) 设 $y = e^{-ax} \sin bx$, 求 dy .

3. 计算 $\cos 60^\circ 30'$ 的近似值.