

第1章 函数与极限

一、求函数定义域、数列的极限与函数的极限

【知识点】

1. 函数的定义域

2. 数列极限

(1) 定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow (\varepsilon - N) : \forall \varepsilon > 0$ (无论多小), $\exists N \in \mathbb{N}^+$, 对 $\forall n > N$, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$

(2) 性质: 极限的唯一性; 收敛数列必有界; 收敛数列的保号性; 子数列收敛性。

【注】(1) 数列收敛必有界; 有界不一定收敛.

3. 函数极限

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$, $|x| > X$, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

【注】 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使 $0 < |x - x_0| < \delta$, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

【注】 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 且 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$

(3) 函数极限的性质: 唯一性, 有界性, 保号性, 子序列的收敛性。

4. 极限运算法则

(1) 极限四则运算性质; (2) 复合函数极限运算法则。

【例1】 设 $f(x) = \frac{\lg|x-1|}{\sqrt{2x+1}}$, 求 $f(x)$ 的定义域为_____。

【练习1】

1. 函数 $y = \ln \frac{x}{x-2}$ 的定义域是_____。

2. 函数 $f(x) = \frac{1}{\ln|x-2|}$ 的定义域是_____。

【例2】 (1) 数列有界是数列收敛的()。

(A) 必要条件

(B) 充分条件

(C) 充要条件

(D) 无关条件

(2) 求数列的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+2^n+3^n}$ 。

【练习 2】

1. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$ 的值为 ().

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 不存在

2. 求数列的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right]$.

3. (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4^{n+1} - 5^n + 7^{n+1}}{7^n - 1}$

(2). 求数列的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{2 + a^n}$. (其中 $|a| \neq 1$).

【例 3】(1) $f(x)$ 在点 x_0 处有定义是极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的 ().

- (A) 必要条件 (B) 充分条件 (C) 充分必要条件 (D) 既非必要又非充分条件

(2) 函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在的 () 条件是左、右极限存在且相等.

- (A) 充分 (B) 必要 (C) 充要 (D) 无关

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(2-2x)(3-3x)}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【练习 3】

1. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}{x^2 - x - 2}$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^2 - 3)^3 (3x - 2)^4}{(6x^2 + 7)^5}$.

3. 讨论极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{3x} - 3e^{-2x}}{4e^{3x} + e^{-2x}}$.

4. (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} - \sqrt{x}}{x-1}$.

(2) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}})$.

(3) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} + 3x - 1}{\sqrt{4+x^2} + 2x - 2}$ 之值.

【补充：知识点】

结论 1 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ 存在, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

证明 $\because \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} [\frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x)] = A \cdot 0 = 0$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = A$ 存在, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

证明 $\because \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)g(x) \cdot \frac{1}{g(x)}] = A \cdot 0 = 0$

【例 4】 (1) 设 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax^2 + x + b}{x^2 - 1} = 3$, 试确定 a, b 之值.

(2) 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{ax^2 + bx + 1}) = 2$, 试确定 a, b 之值.

【练习 4】

1. 求 a, b , 使 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 2}{x + 1} - ax + b \right) = 1$. 2. 求 a, b 的值, 使得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$.

3. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + 4x + 7} - ax - b) = 0$, 试确定 a, b 之值.

二、极限存在准则、重要极限 II

1. 准则 (1) 夹逼准则; (2) 单调有界准则: 单调有界数列必有极限。

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ 或 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

【注】(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{bx+k} = e^{ab}$ 或 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{b}{x+k}} = e^{ab}$;

【补充】

结论 2 (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = a (a > 0), \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = a^b$ 如: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$.

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [1 + u(x)]^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)u(x)} = 1^\infty$

【例 5】(1) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right)$.

(2) 利用极限存在准则证明数列 $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ …… 的极限存在, 并求出该极限。

【练习 5】

1. 设 $x_n = (1^n + 2^n + \cdots + 10^n)^{\frac{1}{n}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2. 求数列的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$.

3. 设 $\{x_n\}$ 满足: $-1 < x_0 < 0$, $x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

【例 6】(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)^{2 \sec x}$;

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

【练习 6】

1. (1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - kx)^{\frac{1}{x}} = e^2$, 则 $k =$ _____. (2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{\sin x}} =$ _____ ..

(3) 若函数 $f(x) = \begin{cases} (1 - 2 \sin x)^{\frac{1}{\tan x}} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 处连续, 则 $k =$ ().

(A) $\frac{1}{e}$ (B) $\frac{1}{e^2}$ (C) $2e$ (D) e^2

2. (1) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{6+x}\right)^x =$ ().

(A) e (B) $2e$ (C) e^3 (D) e^{-3}

(2) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x-1}$ 的值是 ().

(A) 1 (B) e (C) $e^{-\frac{1}{2}}$ (D) e^{-2}

$$3.(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{1+x} \right)^x$$

$$(2) \text{ 求数列的极限 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^n.$$

$$\star\star\star 4. (1) \text{ 求极限 } \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 5^n)^{\frac{1}{n}};$$

$$(2) \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{3}{x}},$$

三、无穷小、无穷大，及无穷小的比较

1. (1) 无穷小: $\lim f(x) = 0$; 无穷大: $\lim f(x) = \infty$;

(2) 定理 1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$.

定理 2 $f(x) \neq 0$, $\lim f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim \frac{1}{f(x)} = 0$

(3) 无穷小性质:

有限个无穷小的代数和或乘积仍是无穷小; 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

2. 无穷小的比较

设 $\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0, \alpha \neq 0$, $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的高阶无穷小, 记为 } \beta = o(\alpha) \\ \infty \Leftrightarrow \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的低阶无穷小} \\ C (C \neq 0) \Leftrightarrow \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的同阶无穷小} \\ 1 \Leftrightarrow \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的等阶无穷小, 记为 } \alpha \sim \beta \end{cases}$

$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0$, β 是 α 的 k 阶无穷小.

3. 等价替换求极限

(1) 等价替换原理: 设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在 $\Rightarrow \lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

(2) 常用的等价替换公式: 当 $x \rightarrow 0$ 时,

① $\sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim x$; ② $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$; ③ $e^x - 1 \sim x$; $a^x - 1 = e^{x \ln a} \sim x \ln a$;

④ $\ln(1+x) \sim x$; ⑤ $(1+x)^a - 1 \sim ax$;

【例 7】(1) 下列结论中正确的是().

(A) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x = 1$ (B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin x = 1$ (C) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1$ (D) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} = 1$

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+2x)$ 是 $\arctan x^2$ 的 ().

(A) 等价无穷小 (B) 高阶无穷小 (C) 同阶无穷小 (D) 低阶无穷小

【练习 7】

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列与 $1 - \sec x$ 等价的无穷小是().

A、 $1 - \cos x$ B、 $\cos x - 1$ C、 $\sin^2 x$ D、 $e^{2x} - 1$

2. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小是 ().

A、 $1 - e^{\sqrt{x}}$ B、 $\ln(1 + \sqrt{x})$ C、 $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$ D、 $1 - \cos \sqrt{x}$

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin 2x$ 是 x 的 ().

(A) 等价无穷小 (B) 高阶无穷小 (C) 同阶无穷小 (D) 低阶无穷小

4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x(1 - \cos x)$ 是 x^3 的 ().

(A) 同阶无穷小, 但不是等价无穷小 (B) 等价无穷小

(C) 高阶无穷小 (D) 低阶无穷小

5. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \cos x}{3x - \sin x}$.

【例 8】(1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$.

(2) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right)$.

【练习 8】

1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n[\ln(2n+1) - \ln(2n-1)]$ 之值.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$.

3. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e}{x^2}$.

4. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos 2x}{x \tan x}$.

5. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{e^{x^2} - \cos x}$.

6. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}$.

7. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + x) - \ln(x - 1)]x$.

8. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x \cos x}}{x \cdot \ln(1 + x^2)}$.

四、函数的连续性与间断点

1. (1) $f(x)$ 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

(2) 左连续: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$; 右连续: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$; $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

【注】(1) 连续三要素: $f(x)$ 在 x_0 有定义; $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在;

(2) $f(x)$ 在 x_0 连续 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在; $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在 $\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 不连续.

2. (1) 间断点

(2) 间断点的分类:

第一类: 左右极限都存在

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A \neq f(x_0) \Leftrightarrow \text{可去间断点};$$

$$f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0) \Leftrightarrow \text{跳跃间断点};$$

第二类: 左右极限至少有一个不存在

$$f(x_0 + 0) = \infty \text{ 或 } f(x_0 - 0) = \infty \Leftrightarrow \text{无穷间断点};$$

当 $x \rightarrow x_0$ 的极限过程中, 函数值不断震荡, 称 $x = x_0$ 为 **振荡间断点**.

【例 9】(1) 函数 $y = f(x)$ 在某点处连续是它在该点极限存在的()条件

A、充分 B、必要 C、充要 D、无关

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{1}{x^2} & \text{当 } x \neq 0, \\ a & \text{当 } x = 0. \end{cases}$, 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a = ()$.

(A) 0

(B) ∞

(C) 1

(D) $\frac{\pi}{2}$

【练习 9】

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a+x^2 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \frac{\sin bx}{x} & x > 0 \end{cases}$, 要使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 a, b 的值为 ()

(A) $a = 0, b = 0$

(B) $a = 1, b = 1$

(C) $a = 1, b = e$

(D) $a = e, b = 0$

2. 判断函数 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x \arctan \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处是否连续.

【例 10】(1) $x = 0$ 是 $y = \frac{\sin x}{x}$ 的()间断点

A、第一类可去 B、第一类跳跃 C、第二类无穷 D、第二类震荡

(2) 求函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ 的间断点, 并判断类型。

【练习 10】

1. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ 的连续性. 若有间断点, 判别其类型.

2. 求函数 $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ 的连续区间, 如果有间断点, 指出间断点的类型.

3. 求 $f(x) = \frac{x}{\ln|x-1|}$ 的间断点, 并判定其类型.

五、求曲线的渐近线

1. (1) 水平渐近线 $y = C \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C$

(2) 铅直或垂直渐近线 $x = x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

(3) 斜渐近线 (P70-14) : $y = kx + b \Leftrightarrow k = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x \rightarrow +\infty) \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x \rightarrow +\infty) \\ (x \rightarrow -\infty)}} (f(x) - kx)$

【例 11】(1) 函数 $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ 图形的铅直和水平渐近线分别为_____.

(2) 求曲线 $y = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线.

【练习 11】

1. 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 图形的水平渐近线为_____.

2. 函数 $y = xe^{\frac{1}{(x-1)^2}}$ 图形的铅直渐近线是_____.

3. 求曲线 $y^3 = 6x^2 + x^3$ 的渐近线.

4. 求曲线 $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$ 的渐近线.