

第十一章 曲线积分与曲面积分

一、对弧长的曲线积分

1. 【第一类曲线积分化为定积分计算】

【例 1.1】计算 $\int_L (x + \sqrt{y}) ds$ ，其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上点 $(0,0)$ 与 $(1,1)$ 之间的一段弧.

【练习 1】对弧长的曲线积分化为定积分

1. 计算曲线积分 $\int_L x ds$ ，其中 $L: x = t^3, y = t, 0 \leq t \leq 1$.

2. 计算 $\int_{\Gamma} \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds$ ，其中 Γ 为螺线: $x = a \cos t, y = a \sin t, z = at$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

3. 曲线 $\Gamma: x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3$ ，计算 Γ 上从 $O(0,0,0)$ 到 $A(3,3,2)$ 的一段弧的弧长.

2. 【利用函数定义在曲线上和被积函数为“1”化简计算】

【例 1.2】计算曲线积分 $\int_L (x + y) ds$ ，其中 L 为连接 $(1,0)$ 与 $(0,1)$ 两点的直线段.

【练习 2】利用函数定义在曲线上和被积函数为“1”化简计算

1. 计算曲线积分 $\int_L (|x| + |y|)^n ds$, 其中 $L: |x| + |y| = 1$.

2. 计算曲线积分 $\oint_L (x^2 + y^2)^n ds$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = R^2$.

3. 计算对弧长的曲线积分 $\int_L (x + y)^n ds$, 其中 L 为连接 $(a, 0)$ 及 $(0, a)$ 两点的直线段.

3. 【利用函数的奇偶性和积分线段的对称性】

【例 1.3】 计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} x^2 ds$, 其中 Γ 为圆 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.

【练习 3】利用函数的奇偶性和积分线段的对称性

1. 计算曲线积分 $\oint_L (4x^2 + 3y^2 + 16xy) ds$, 其中 $L: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$, A 为该椭圆的周长.

2. 计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z) ds$, 其中 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.

二、对坐标的曲线积分

【例 2.1】 计算 $\int_L xy dx$ ，其中 L 为抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $A(1, -1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段弧.

【练习 1】第二类曲线积分为定积分计算

1. 计算曲线积分 $\int_L 2xy dx + x^2 dy$ ，其中 L 为抛物线 $y = x^2$ 上从点 $O(0, 0)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段弧.

2. 计算曲线积分 $\oint_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$ ，其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ （按逆时针方向）.

3. 计算曲线积分 $\int_L x dy - 2y dx$ ，其中 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分.

4. 计算曲线积分 $\int_{\Gamma} x dx + y dy + z dz$ ，其中 Γ 为从点 $A(1, 1, 1)$ 到点 $B(2, 3, 4)$ 的直线段.

三、格林公式

【例 3.1】 $\int_L (x^2 + 2xy)dx + (4x - 2y)dy$, 其中 L 是正向椭圆周 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

【练习 1】格林公式及其应用-1. 闭合、连续

1. (1) 计算 $\oint_L (x+y)dx + (x-y)dy$, 其中 L 为以逆时针方向绕行的椭圆周 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(2) 利用格林公式计算曲线积分 $\oint_L (x^2 y \cos x + 2xy \sin x - y^2 e^x)dx + (x^2 \sin x - 2ye^x)dy$, 其中 L 为正向星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$).

2. (1) 设 L 为沿 $x^2 + y^2 = R^2$ 逆时针方向一周, 用格林公式计算 $I = \oint_L -x^2 y dx + xy^2 dy = (\quad)$.

(A) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 dr$ (B) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R 4r^3 \sin \theta \cos \theta dr$ (C) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R R^2 r dr$ (D) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr$

(2) 设 L 是 $|y| = 1 - |x|$ 表示的闭曲线的正向。则 $\oint_L 2y dx + x dy = (\quad)$.

(A) 2 (B) -2 (C) 1 (D) 0

3. (1) $\oint_L (2x - y + 4)dx + (3x + 5y - 6)dy$, 其中 L 为三顶点分别为 $(0,0)$ 、 $(3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界曲线.

(2) 计算曲线积分 $\oint_L (x + 2y)dx + (x - 2y)dy$, 其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = x$ 所围成的区域的正向边界曲线.

【例 3.2】 $\int_L (xy + e^x)dx + [x^2 - \ln(1+y)]dy$, 其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 从点 $A(\pi, 0)$ 到 $O(0, 0)$ 的一段.

【练习 2】格林公式及其应用-2. 不闭合、连续

1. 计算 $\int_L (x^2 - 2y)dx + (3x + ye^y)dy$, 其中 L 是由直线 $x + 2y = 2$ 上从点 $A(2, 0)$ 到点 $B(0, 1)$ 的一段, 以及

圆弧 $x = -\sqrt{1 - y^2}$ 上从点 $B(0, 1)$ 到点 $C(-1, 0)$ 的一段连接而成的定向曲线.

2. 计算 $\int_L (x + e^{\sin y})dy - (y - \frac{1}{2})dx$, 其中 L 是位于第一象限中的直线 $x + y = 1$ 与位于第二象限中的圆弧

$x^2 + y^2 = 1$ 构成的曲线, 方向是由 $A(1, 0)$ 到 $B(0, 1)$ 再到 $C(-1, 0)$.

3. 计算 $\oint_L \frac{xy^2 dy - x^2 y dx}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 的顺时针方向.

2. 【验证曲线积分与路径无关, 并计算曲线积分】

【例 3.2】 验证曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (1 - 2xy - y^2)dx - (x + y)^2 dy$ 在整个 xoy 面内与路径无关, 并计算积分值.

【练习 2】验证曲线积分与路径无关，并计算曲线积分

1. 验证曲线积分 $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy$ 在整个 xoy 面内与路径无关，并计算积分值.

2. 设曲线积分 $\int_L xy^2 dx + yf(x)dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 可微，且 $f(0) = 0$

求 $f(x)$ ，并计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + yf(x)dy$.

3. 设 $f(x)$ 可导，且 $f(0) = 1$ ，若 $\int_L yf(x)dx + [f(x) - x^2]dy$ 与积分路径无关，求函数 $f(x)$.

3. 【证明为某二元函数的全微分，并求原函数】

【例 3.3】 验证 $(x + 2y)dx + (2x + y)dy$ 在整个 xoy 面内是某个函数的全微分，并求出一个函数 $u(x, y)$.

【练习 3】证明为某二元函数的全微分，并求原函数

1. 验证在整个 xoy 面内， $(2x + y^3)dx + (3xy^2 + 4)dy$ 是某个函数 $u(x, y)$ 的全微分，并求出 $u(x, y)$.

2. 验证 $(3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy$ 在整个 xoy 面内是某个函数的全微分，并求出一个函数 $u(x, y)$.

四、对坐标的曲面积分

1. 【曲面积分化为二重积分】

【例 4.1】(1). 已知 Σ 是 $z = x^2 + y^2$ 上 $z \leq 1$ 的部分曲面, $\iint_{\Sigma} \sqrt{1+4z} dS = (\quad)$.

(A) π (B) 3π (C) 4π (D) 8π

(2). $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被平面 $z = 1$ 所截下的部分曲面.

【练习 1】曲面积分化为二重积分

1. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 在 $z \geq h$ 部分, $0 < h < a$, 则 $\iint_{\Sigma} z dS = (\quad)$.

(A) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a^2-h^2} \sqrt{a^2-r^2} \cdot r dr$ (B) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \sqrt{a^2-r^2} \cdot r dr$

(C) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\sqrt{a^2-h^2}}^{\sqrt{a^2-h^2}} a \cdot r dr$ (D) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} a \cdot r dr$

2. $\iint_{\Sigma} 3z dS$, 其中 Σ 为 $z = 2 - (x^2 + y^2)$ 在 xoy 面上方的部分.

3. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 介于平面 $z = 0$ 与 $z = 1$ 之间的曲面.

4. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面 $z = h$ ($0 < h < a$) 截出的顶部.

2. 【几何意义 $\iint_{\Sigma} k dS = kS(\Sigma)$ 】

【例 4.2】设 Σ 是柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ ($R > 0$) 被平面 $z = 0, z = h$ 所截部分, 求 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$.

【练习 2】几何意义 $\iint_{\Sigma} k dS = kS(\Sigma)$

1. 求 $\iint_{\Sigma} y dS$, 其中 Σ 是右半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y \geq 0$.

2. $\iint_{\Sigma} (z + 2x + \frac{4}{3}y) dS$, 其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一卦限中的部分.

3. 【函数的奇数偶数性与对称性、或轮换对称性】

【例 4.3】(1) 求 $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$, 其中 Σ 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$.

(2) $\oiint_{\Sigma} (x + y + z) dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

【练习 3】函数的奇数偶数性与对称性、或轮换对称性

1. 设曲面 Σ 是上半球面: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($z \geq 0$), 曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第五卦限中的部分, 则有 ().

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} \quad \iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS & \text{(B)} \quad \iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} y dS \\ \text{(C)} \quad \iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z dS & \text{(D)} \quad \iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS \end{array}$$

2. 求 $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$, 其中 Σ 是左半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y \leq 0$.

3. 计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} (x + |y|) dS$, 其中 Σ 为 $|x| + |y| + |z| = 1$.

4. 计算 $\iint_{\Sigma} z^2 dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

五、对坐标的曲面积分

【知识 5】 1. 第二类曲面积分：流量 $\Phi = \iint_{\Sigma} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy$

2. 计算：(1) 分面投影法；(2) 合一投影法或点积法；(3) 高斯公式.

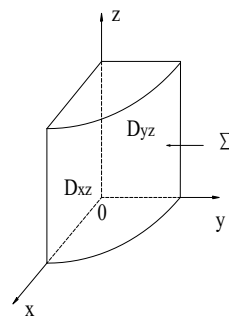
1. 分面投影法

【例 5.1】 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyzdxdy$ ，其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在 $x \geq 0, y \geq 0$ 的部分.

【练习 1】一分面投影法

1. 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2)dxdy$ ， Σ 是圆 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq R^2 \\ z = 0 \end{cases}$ 的下侧.

2. 计算 $\iint_{\Sigma} z dxdy + x dydz + y dzdx$ ，其中 Σ 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 $z = 0$ 及 $z = 3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧.



2. 合一投影法

【例 5.2】 $\iint_{\Sigma} x dydz + y dzdx + z dxdy$ ，其中 Σ 是曲面 $z = x^2 + y^2$ 在第一卦限中 $0 \leq z \leq 1$ 部分的下侧.

【练习 2】-合一投影法

1. $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dzdx + z dxdy$ ，其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 上满足 $x \geq 0, y \geq 0, z \leq 1$ 的那一部分的下侧.

2. $\iint_{\Sigma} (2+z)dydz + zdx dy$, 其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的部分的下侧.

3. $\iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x]dydz + [2f(x, y, z) + y]dzdx + [f(x, y, z) + z]dxdy$, 其中 $f(x, y, z)$ 为连续函数, Σ 是平面 $x - y + z = 1$ 在第四卦限部分的上侧.

+++++

六、高斯公式

1. 闭合且连续

【例 6.1】计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧.

【练习 1】闭合且连续-直接用高斯公式

1. (1) 计算 $\oiint_{\Sigma} (x^3 - y^2 z)dydz - 2x^2 ydzdx + xydxdy$, 其中 Σ 是由坐标面和平面 $x = a$, $y = a$, $z = a$ 所围成的正方体 Ω 的表面的外侧, a 为正数.

(2) 计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} (x - y)dxdy + (y - z)xdydz$, 其中 Σ 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 0$, $z = 3$ 所围成的空间闭区域 Ω 的整个边界曲面的外侧.

(3) 计算 $\oiint_{\Sigma} x(y^2 + z^2)dydz + x^2zdx dy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

(4) 计算向量 $\vec{A} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ 穿过曲面 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ 流向外侧的流量.

2. (1) $\oiint_{\Sigma} zxdydz + xydzdx + yzdx dy$ $\Sigma: x^2 + y^2 = R^2, z = 0, z = h$ 所围成立体表面外侧.

(2) 计算 $I = \oiint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$ 的外侧.

(3) 计算积分 $\oiint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, 其中 Σ 是锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 与平面 $z = h$ 所围空间区域 $(0 \leq z \leq h)$ 的表面, 方向取外侧.

(4) 计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} \frac{1}{1+x^2} dydx + \frac{1}{1+y^2} dzdx + \frac{1}{1+z^2} dxdy$, 其中 Σ 为锥面

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1$ 所围成的立体的表面外侧.

2. (1) 计算 $I = \oiint_{\Sigma} x(y^2 + z^2) dydz$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧.

(2) 设 f 具有连续偏导数, 求 $I = \oiint_{\Sigma} \frac{1}{y+3} f\left(\frac{x+3}{y+3}\right) dydz + \frac{1}{x+3} f\left(\frac{x+3}{y+3}\right) dzdx + z dx dy$,

其中 Σ 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 及 $z = 8 - x^2 - y^2$ 所围的立体表面的外侧.

(3) 计算 $\oiint_{\Sigma} z dx dy + \frac{1}{x} f\left(\frac{x}{y}\right) dz dx + \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) dy dz$, 其中 $f(u)$ 有连续导数, Σ 是由柱面 $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2y^2$

及平面 $z = 0$ 所围立体表面内侧.

(4) 计算 $\oiint_{\Sigma} \left[\frac{1}{y} f\left(\frac{y}{z}\right) + z^3 \right] dx dy + \left[\frac{1}{z} f\left(\frac{y}{z}\right) + y^3 \right] dz dx + x^3 dy dz$, 其中 $f(u)$ 有连续导数, Σ 是由锥面

$x = \sqrt{y^2 + z^2}$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 所围立体表面外侧.

2. 不闭合, 但连续——补面

【例 6.2】计算 $\iint_{\Sigma} (3x - z)dydz + zdx dy$, 其中 Σ 为有向曲面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$), 其法向量与 z 轴负向的夹角成锐角.

【练习 2】不闭合, 但连续——补面

1. (1) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dx dy$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的下侧.

(2) 计算 $\iint_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dx dy$, 其中 Σ 上 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

2. (1) 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{x^2}{2}dydz + \sin(xz^2)dzdx + z^2dx dy$, 其中 Σ 为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $z = 0, z = 1$ 之间的下侧.

(2) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (y^2 - x)dydz + (z^2 - y)dzdx + (x^2 - z)dx dy$, 其中 Σ 为抛物面

$z = 2 - x^2 - y^2$ 位于 xoy 面上方的部分的上侧.

3. (1) 计算 $\iint_{\Sigma} (2x+z)dydz + zdx dy$, 其中 Σ 为有向曲面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$), 取上侧.

(2) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1)dx dy$, 其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ ($z \geq 0$) 的上侧.

(3) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (2x+z)dydz + zdx dy$, 其中 Σ 为 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$) 上侧.

3. 闭合, 但不连续

【例 6.3】 计算 $\oiint_{\Sigma} \frac{x dydz + y dzdx + z dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

【练习 3】闭合, 但不连续——“挖洞”或化简

1. 计算 $\oiint_{\Sigma} \frac{x}{r^3} dydz + \frac{y}{r^3} dzdx + \frac{z}{r^3} dxdy$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, Σ : 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

2. 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{xzdydz + yzdzdx + z^2dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 其中 Σ 为半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

七、斯托克斯公式

【知识 7】空间曲线积分：1. 直接曲线积分法；2. 斯托克斯公式.

【例 7.1】 计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} ydx + zdy + xdz$, 其中 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, 若从 x 轴的正向看去, 这圆周是取逆时针方向.

【例 7.2】 求向量场 $\vec{A}$ 的旋度, 设 $\vec{A} = (z + \sin y)\vec{i} - (z - x \cos y)\vec{j}$.

【练习 1】利用斯托克斯公式求曲线积分

1.(1) 计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} 3ydx - xzdy + yz^2dz$, 其中 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$, 若从 z 轴的正向看去, 这圆周是取逆时针方向.

(2) 计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} z dx + (2x - y) dy + (x + y) dz$, 其中 Γ 是平面 $x + y + \frac{z}{2} = 1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界, 若从 x 轴的正向看去, 这曲线是取逆时针方向.

2.(1) 计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} (z - y) dx + (x - z) dy + (x - y) dz$, 其中 Γ 是 $x^2 + y^2 = 1$, $x - y + z = 2$, 从 z 轴正向看去, 这曲线是取顺时针方向.

(2) 计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} (y + 1) dx + (z + 2) dy + (x + 3) dz$, 其中 Γ 是圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$; 若从 Ox 轴正向看过去, 这个圆周是依逆时针方向进行的.

3. 求向量场 $\vec{A}$ 的旋度, 设 $\vec{A} = e^{xy} \vec{i} - \cos y \vec{j} + \sin^2 z \vec{k}$.