

第十章 重积分

一、二重积分的概念与性质

【知识 1】 利用二重积分的几何意义与性质(计算、估值、比较积分大小、中值定理的应用)

【例 1】 (1) 根据二重积分的几何意义 $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$. 其中 $D: x^2+y^2 \leq 1$.

(2) 估计下列二重积分的值:

(i) $\iint_D xy(x+y) d\sigma$, 其中 D 是矩形闭区域 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$;

(ii) $\iint_D (x^2+4y^2+9) d\sigma$, 其中 D 是圆形闭区域 $x^2+y^2 \leq 4$;

【练习 1】 估值

1. (1) 估计下列积分值, 设 $I = \iint_D (2x^2+y^2+2) d\sigma$ $D = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq 3\}$, 则 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 估计下列积分值, 设 $I = \iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma$ $D = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq 1\}$, 则 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 估计下列积分值, 设 $I = \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$ $D = \{(x,y) | -\pi \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq \pi\}$, 则 $\underline{\hspace{2cm}}$.

★★ **【例 2】** 判断下列积分值的大小: $I_1 = \iint_D \ln^3(x+y) dx dy$, $I_2 = \iint_D (x+y)^3 dx dy$,

$I_3 = \iint_D [\sin(x+y)]^3 dx dy$, 其中 D 由 $x=0, y=0, x+y=\frac{1}{2}, x+y=1$ 围成, 则 I_1, I_2, I_3 之间的大小顺序为 ().

A. $I_1 < I_2 < I_3$ B. $I_3 < I_2 < I_1$ C. $I_1 < I_3 < I_2$ D. $I_3 < I_1 < I_2$

★★ **【练习 2】** 比较积分大小

1. (1) $I_1 = \iint_D (x+y) d\sigma$, $I_2 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma$, $I_3 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$, D 由 $x=0, y=0, x+y=1$ 围成, 则 ().

(A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_2 > I_1 > I_3$ (C) $I_1 > I_2 > I_3$ (D) $I_1 = I_2 = I_3$

(2) 设 $I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$, $I_2 = \iint_D \cos(x^2+y^2) d\sigma$, $I_3 = \iint_D \cos(x^2+y^2)^2 d\sigma$,

其中 $D = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq 1\}$ 试比较三个积分的大小 ().

(A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_2 > I_1 > I_3$ (C) $I_1 > I_2 > I_3$ (D) $I_1 = I_2 = I_3$

(3) 设 D 是由 $x=0$, $y=0$, $x+y=\frac{1}{10}$, $x+y=1$ 围成的平面区域,

$I_1 = \iint_D \sin(x+y) d\sigma$, $I_2 = \iint_D (x+y) d\sigma$, $I_3 = \iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 试比较三个积分的大小 ().

(A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_2 < I_1 < I_3$ (C) $I_3 < I_1 < I_2$ (D) $I_3 < I_2 < I_1$

【思考题 1】

★★★1. 试用二重积分性质证明不等式

$1 \leq \iint_D (\sin x^2 + \cos y^2) d\sigma \leq \sqrt{2}$, 其中 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

★★★2. 计算 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D e^{x^2-y^2} \cos(x+y) dx dy$, 其中 D 由中心在原点, 半径为 r 的圆所围成.

二、二重积分的计算

(一) 直角坐标系下 (X 型、Y 型)

【知识 1】选择合适积分类型

★★【例 3】计算二重积分 $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ 其中 D 是由直线 $x=2, y=x, xy=1$ 所围成的区域.

★★【练习 3】选择合适积分类型

1. (1) 计算二重积分 $\iint_D |x| dx dy$, 其中 $D: x^2+y^2 \leq a^2, y \geq 0$.

(2) 计算 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 D 为由直线 $y=x-2$ 及抛物线 $y^2=x$ 所围成的闭区域.

(3) 计算二重积分 $\iint_D (3x+2y)d\sigma$, 其中 D 是由直线 $x=0$, $y=0$, $x+y=2$ 围成的闭区域.

(4) 计算二重积分 $\iint_D ye^{xy}d\sigma$, 其中 D 是由 $xy=1$, $x=2$, $y=2$ 围成的闭区域.

2. 画出积分区域, 并计算下列二重积分:

(1) $\iint_D x\sqrt{y}d\sigma$, 其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint_D xy^2d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域;

(3) $\iint_D (x^2+y^2-x)d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=2$, $y=x$ 及 $y=2x$ 轴所围成的闭区域.

3. 画出积分区域, 并计算下列二重积分:

(1) $\iint_D e^{x+y}d\sigma$, 其中 $D: |x|+|y|\leq 1$

(2) $\iint_D \frac{\sin x}{x}d\sigma$, 其中 D 是由 $y=x$, $y=\frac{x}{2}$, $x=2$ 所围成的区域

(3) $\iint_D x^2e^{-y^2}d\sigma$, 其中 D 是以 $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ 为顶点的三角形闭区域

4. (1) 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$, $y=x$ 和 x 轴所围成, 它的面密度

$$\rho(x,y)=x^2+y^2, \text{ 求该薄片的质量.}$$

(2) 求由 $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

(3) 求由平面 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体的体积.

(4) 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

★★ (二) 利用极坐标计算二重积分

★★ 【例 4】 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, 其中 $D: x^2+y^2 \leq 4$.

★★ 【练习 4】 利用极坐标计算二重积分

1. (1) 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, 其中 D 是由圆环 $a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2$ 所围成的闭区域.

(2) 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2} d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq R^2\}$.

(3) 计算二重积分 $\iint_D e^{2(x^2+y^2)} dx dy$, 其中 D 是由 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域.

2. (1) 计算二重积分 $\iint_D \ln(1+x^2+y^2) dx dy$, 其中 $D: x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.

(2) 利用极坐标计算二重积分 $\iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy$, 其中 $D: 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0, y \leq x$.

(3) 设 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}$, 将二重积分 $\iint_D \ln \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$ 化为极坐标形式的二次积分, 并计算积分值.

3. (1) 设 $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $D: x^2 + y^2 = \pi^2, x^2 + y^2 = 4\pi^2, y = x$ 和 $y = 0$ 所围成的闭区域.

(2) 求 $\iint_D x dx dy$, 其中 D 是由圆 $x^2 + y^2 \leq ax$ ($a > 0$) 所围成的闭区域.

(3) 求 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 D 是由 y 轴及圆周 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 所围成的在第一象限内的区域.

【思考题 2】

★★★1. 设 $f(x, y)$ 连续, D 由 $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$ 围成, $f(x, y)$ 满足

$$f(x, y) = xy + \iint_D f(x, y) dx dy, \text{ 求 } f(x, y).$$

★★★2(1) 计算 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t^3} \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy$ ($t > 0$), 其中函数 $f(u)$ 可微, 且 $f(0) = 0$.

(2) 设函数 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且满足 $f(t) = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} (x^2+y^2) f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy + t^4$, 求 $f(t)$.

三、交换二重积分的积分次序

【知识 1】X 型与 Y 型互化及其计算

【例 5】交换积分次序

(1) $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx$. (2) 改变二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} dx$ 的积分次序, 并计算积分值.

【练习 5】交换积分次序

1. (1) 交换分积分次序 $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx$.

(2) 交换积分次序 $\int_0^a dx \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy$.

(3) 交换二重积分次序 $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$.

2. 交换积分次序 (1) $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy$.

(2) $\int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx$.

3. (1) $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$;

(2) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx$

【思考题 3】

★★★1. (2004 年数学一) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2)$ 等于 ()(A) $2f(2)$ (B) $f(2)$ (C) $-f(2)$

(D) 0

【知识 2】直角坐标系与极坐标系互化

【例 6】 (1) 化二重积分 $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx$ 为极坐标下的二次积分.

(2) 计算二次积分 $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2) dx, (a > 0).$

【练习 6】直角坐标系与极坐标系互化

1. (1) 化二重积分 $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ 为极坐标下的二次积分.

(2) 化二重积分 $\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^x f(x^2 + y^2) dx$ 为极坐标下的二次积分.

(3) (2006 年数学一、二) 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr = (\quad)$

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ (B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ (C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dy$ (D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dy$

2. (1) 计算 $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2-y^2}} e^{x^2+y^2} dx.$ (2) 计算二次积分 $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2) dx, (a > 0).$

(3) 计算二次积分 $\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy.$

四、计算三重积分 (直角坐标、柱面坐标、球面坐标)

(一) 【直角坐标】

1. 【投影法】“先一后二”

【例 7】设 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω : $x=0$, $y=0$, $z=0$ 及平面 $x+y+z=1$ 所围成的四面体.

【练习 7】投影法

1. (1) 计算 $\iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dx dy dz$, Ω 由曲面 $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$ 围成.

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} xz dx dy dz$, 其中 Ω 是由平面 $z=0$, $z=y$, $y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

2. (1) 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 Ω 为平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ 所围成的四面体.

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, Ω : 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

3. 设有一物体, 占有空间闭区域 $\Omega=\{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, 在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z)=x+y+z$, 计算该物体的质量.

2. 【截面法】“先二后一”

【例 8】计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dv$, 其中 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1, z = 2$ 围成的立体.

【练习 8】截面法

1. (1) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 2$ 围成的闭区域.

(2) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ 被夹在 $z = 3$ 和 $z = 4$ 之间的部分.

2. (1) 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, Ω 由椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 围成.

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由锥面 $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = h (R > 0, h > 0)$ 所围成的闭区域.

(二) 【柱面坐标】柱面变换

【例 9】计算 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dv$, 其中 Ω 由 $z = x^2 + y^2$ 及 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 围成.

【练习9】柱面变换

1. (1) 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是由柱面 $x^2 + y^2 = 4$ 及平面 $z = -1$, $z = 2$ 所围成的闭区域.

(2) 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, Ω 为 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 1$ 所围成的空间区域.

(3) 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 平面 $z = 1$ 所围成的区域.

2. (1) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2) dx dy dz$, 其中 Ω 为上半球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$.

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} xy dv$, Ω 是由圆柱 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$ 所围成的闭区域.

3. (1) 设 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 位于第一卦限的部分, 计算 $\iiint_{\Omega} z dv$.

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 由 $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 = 4$ 及 $z = 0$ 围成.

(3) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z dv$, Ω 是由曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 所围成的闭区域.

(三) 【球面坐标】球面变换

【例 10】计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域.

【练习 10】球面变换

1. (1) 设 Ω 是由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = 1$ 所围的有界闭区域, 计算 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$.

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} \ln(x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中 $\Omega: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

(3) 求 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$, Ω : 是由圆锥面 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 及球面 $r = 2$ 所围成的位于 xoy 平面上方的立体.

2. (1) 计算 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$, 其中 Ω 是由 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 所围的有界闭区域.

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 围成.

(3) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq z$.

五、利用二重积分、三重积分的对称性与被积函数的奇偶性

(一) 二重积分的积分区域的对称性与函数的奇偶性

【例 11】(1) 设 $D_1 = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,

$I_1 = \iint_{D_1} (\sin x \cos y + x^2) d\sigma$, $I_2 = \iint_{D_2} x^2 d\sigma$, 则 I_1 与 I_2 的关系是 ().

(A) $I_1 = I_2$ (B) $I_1 = 2I_2$ (C) $I_1 = 4I_2$ (D) $I_1 = \frac{1}{2}I_2$

(2) 计算 $\iint_D (|x| + |y|) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$.

【练习 11】二重积分的积分区域的对称性与函数的奇偶性

1. (1) 设有平面区域 $D = \{(x, y) | -a \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$, $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$,

则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy = ()$.

(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$ (B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy$ (C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$ (D) 0

(2) 计算 $I = \iint_D [xf(x^2 + y^2) + yf(x^2 - y^2)] dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$.

2. (1) 计算 $I = \iint_D (2 + xy) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

(2) 计算二重积分 $\iint_D (x + 2y) d\sigma$, 其中 D 是由 $y = 2x^2$, $y = x^2 + 1$ 围成的闭区域.

3. (1) 计算 $I = \iint_D (x + y)^2 d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2y\}$.

(2) 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$, 求 $I = \iint_D (x^2 + 2\sin x + 3y + 4) d\sigma$.

(二) 三重积分的积分区域的对称性与函数的奇偶性

【例 12】(1) 设有空间闭区域 $\Omega_1 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$,

$\Omega_2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则有 ().

(A) $\iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv$ (B) $\iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv$ (C) $\iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv$ (D) $\iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv$

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} (x + y + z) dv$, 其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

【练习 12】三重积分的积分区域的对称性与函数的奇偶性

1. (1) 设 Ω 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, 则三重积分 $\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dx dy dz$ 值是 ().

- (A) 0 (B) π (C) $\frac{4\pi}{3}$ (D) 2π

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} xy dv$, 其中 Ω 是由 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = 0$ 所围成的闭区域.

2. (1) 计算 $\iiint_{\Omega} (x + y + z) dv$, Ω 是由圆柱 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 0$, $z = 3$ 所围成的闭区域.

(2) 计算 $\iiint_{\Omega} (x + y + z)^2 dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 所围成的闭区域.

+++++

六、二重积分、三重积分的应用 (求曲面面积、求体积、求质量、求质心等)

(一) 【求体积】

【例 13】 (1) 求由曲面 $z = x^2 + y^2$ 及 $z = 4$ 所围成立体的体积.

(2) 求由上半球面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及上半锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的立体体积.

【练习 13】求体积

1.(1) 由曲面 $z = x^2 + y^2$, $y = 1$, $z = 0$, $y = x^2$ 所围成的曲顶柱体的体积为 ().

- (A) $\frac{88}{105}$ (B) $\frac{44}{105}$ (C) $\frac{22}{105}$ (D) $\frac{11}{105}$

(2)求由曲面 $z=0$, $z=e^{-(x^2+y^2)}$, $x^2+y^2=R^2$ 所围成立体的体积.

(3)求以 $y^2=x, x=1$ 所围成的区域 D 为底, $f(x,y)=xy^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

(4)求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成立体的体积.

2. (1)利用二重积分计算由曲面 $x+y+z=3$, $x^2+y^2=1$ 及 $z=0$ 围成立体的体积.

(2)利用二重积分计算由平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (其中 $a, b, c > 0$) $x=0, y=0, z=0$ 所围立体的体积.

(3)利用二重积分计算由下列曲面 $z=x^2+y^2, y=1, z=0, y=x^2$ 所围成的曲顶柱体的体积.

(4)利用二重积分计算由曲面 $z=6-x^2-y^2, x+y=1, x=0, y=0$ 及 $z=0$ 所围成的曲顶柱体的体积.

3. (1)求由柱面 $x=y^2$ 及平面 $z=0, z=1-x$ 所围成立体的体积.

(2)求由 $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2=4z$ 所围成立体的体积.

(二)【求曲面面积】

【例 14】 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 所割下的部分曲面的面积.

【练习 14】求曲面面积

1. (1) 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = x$ 所截下部分的面积.

(2) 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ 所割下的部分曲面的面积.

(3) 求平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 被三坐标面所割出的有限部分的面积.

2. (1) 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 含在圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 内部的那部分面积.

(2) 求底圆半径均为 R 的两直交圆柱面所围立体的表面积.

(三)【求质量或质心、转动惯量】

【例 15】(1) 设平面薄片所占的区域 D 是由 $x + y = 2$, $y = x$ 和 $y = 0$ 所围成, 它的面密度

$\rho(x, y) = x^2 + y^2$, 求该薄片的质量.

(2) 利用三重积分求由曲面 $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1$ 所围成立体的质心 (设密度 $\rho = 1$).

【练习 15】求质量或质心、转动惯量

1. (1) 已知平面薄片 D 由 $y = x^2$ 及直线 $y = x$ 所围成, 面密度函数为 $\rho(x, y) = x^2 y$, 求其质量.

(2) 设有一物体, 占有空间区域 $\Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, 在点 (x, y, z) 处的密度函数为 $\rho = x^2 + y^2 + z^2$, 计算该物体的质量.

(3) 设抛物面壳 $\Sigma: z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) (0 \leq z \leq 1)$, 且 Σ 上点 (x, y, z) 处的面密度为 $\rho = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, 求此壳的质量.

2. (1) 求位于两圆 $\rho = 2 \sin \theta$ 和 $\rho = 4 \sin \theta$ 之间的均匀薄片的质心.

(2) 求半径为 a 、高为 h 的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量 (设密度 $\rho = 1$).